TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2022. március 18.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. (a) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye között pontosan háromféle számjegy forduljon elő.
(b) Írd fel a 2022-t egy négyjegyű, egy háromjegyű és egy kétjegyű szám összegeként úgy, hogy a három összeadandó kilenc számjegye mind különböző legyen.

Elegendő egy-egy megoldást megadni; nem kell az összes lehetőséget megkeresni, sem azt leírni, hogy hogyan találtad ezt a megoldást.

Megoldás. (a) $1900 + 111 + 11 = 2022$ (az előforduló számjegyek a nulla, az egy és a kilenc) (***3*** *pont*)

(b) $1278 + 694 + 50 = 2022$ (a kimaradó számjegy a hármas) (***4*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Mindkét részfeladatra sokféle helyes konstrukció adható. A (b) résznél ugyanakkor minden megoldásban a 3-as számjegynek kell kimaradnia (ez abból következik, hogy egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyeinek összegének 9-es maradékával, a részletek meggondolását a kedves Olvasóra bízzuk).

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan két állítás igaz?

- A szám ezresekre kerekítve 0.
- A szám százasokra kerekítve 100.
- A szám tízesekre kerekítve 280.
- A szám százasokra kerekítve 300.

Első megoldás. Először nézzük meg, hogy a négy állítás külön-külön melyik számtartományban igaz.

- A szám ezresekre kerekítve 0: $1 \leq x < 500$
- A szám százasokra kerekítve 100: $50 \leq x < 150$
- A szám tízesekre kerekítve 280: $275 \leq x < 285$
- A szám százasokra kerekítve 300: $250 \leq x < 350$ (***1*** *pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Az első állítás nem lehet hamis, mert akkor az összes többi is hamis lenne. (*1 pont*)

Ha a harmadik állítás igaz, akkor a negyedik is, mert $250 < 275 < 285 < 350$. (*1 pont*)

Tehát csak úgy lehet a négy állítás közül pontosan kettő igaz, ha a két igaz állítás az első és a második, vagy az első és a negyedik. (*1 pont*)

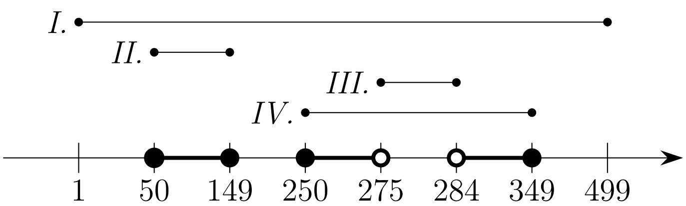
Ha az első két állítás az igaz, akkor $50 \leq x < 150$ és ebből következik, hogy az utolsó két állítás hamis, mert azok csak nagyobb számokra igazak. Ez pontosan 100 szám. (*1 pont*)

Ha az első és a negyedik állítás az igaz, akkor a második biztosan hamis, mert az kisebb számokra igaz. Arra viszont nekünk kell ügyelni, hogy a harmadik állítás is hamis legyen. 250 és 350 közé megint csak száz szám esik, de ezek közül nem jók azok, amelyek 275 és 285 közé esnek, ezért 10-zel kevesebb, összesen 90 jó számot találtunk ebben az esetben ($250 \leq x < 275$ vagy $285 \leq y < 350$). (*1 pont*)

A két esetben kapott számok között nincs átfedés, így összesen $100 + 90 = 190$ olyan pozitív egész létezik, amelyre a felsorolt négy állítás közül pontosan kettő igaz. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás. Ábrázoljuk számegyenesen, hogy az egyes állítások mely pozitív egészek esetén igazak.



(*2 pont*)

Látható, hogy pontosan két állítás akkor teljesül az x számra, ha $50 \leq x \leq 149$ vagy $250 \leq x < 275$ vagy $284 < x \leq 349$. (*1 pont*)
Az első esetnek 100 darab, (*1 pont*)
a másodiknak 25 darab, (*1 pont*)
a harmadiknak 65 darab pozitív egész felel meg. (*1 pont*)
Tehát összesen 190 olyan pozitív egész van, amelyre pontosan két állítás igaz. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Az indoklás nélküli helyes végeredmény 2 pontot ér.
Ha felsorolja a helyes számokat, de nem ír indoklást, akkor 4 pontot kapjon.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. A Bergengóc Titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét. A bal oldali ábrán egy 3×3-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.

A titkosszolgálat most egy 5×5-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán. Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban?

A teljes pontszámhoz elegendő egy jól kitöltött táblázatot megadni, indoklás nem szükséges.

	5	**2**	**1**	
3			■	(1)
3	■	■		(2)
1	■			(3)
	(1)	(2)	(3)	

	9	**8**	**3**	**8**	**14**	
7						(1)
13						(2)
8						(3)
6						(4)
11						(5)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	

Megoldás.

	9	**8**	**3**	**8**	**14**	
7			■	■		(1)
13	■		■	■	■	(2)
8	■	■			■	(3)
6	■				■	(4)
11		■		■	■	(5)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	

Rossz kitöltés esetén az alábbiak alapján járjon részpontszám (mindig a jobbat véve figyelembe):

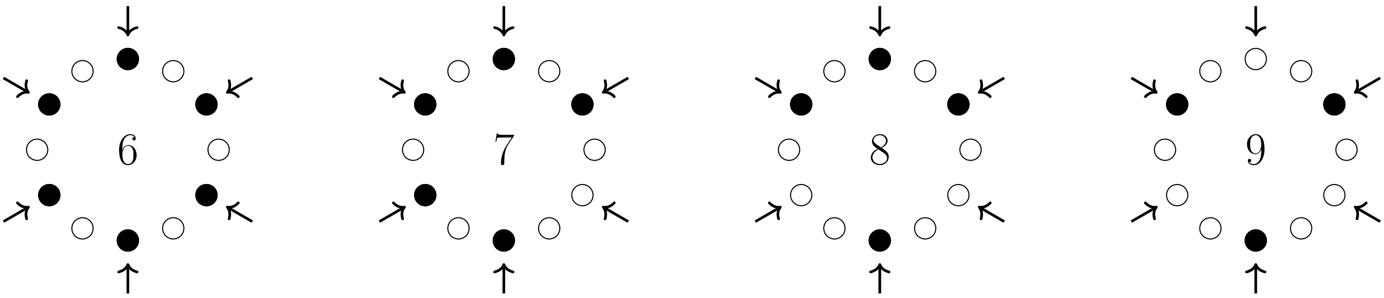
- Annyi levonás a 7-ből, ahány mezőt rosszul színezett ki a jó megoldáshoz képest.
- A jól kitöltött sorokért/oszlopokért: 1-2 darab esetén 1 pont, 3-4 darab esetén 2 pont, 5-6 esetén 3 pont, 7-8 esetén 4 pont, 9 esetén 5 pont. Itt a jól kitöltött sor/oszlop azt jelenti, hogy az összeg megfelelő, azaz nem kell megegyeznie a teljesen jó megoldásban szereplő sorral/oszloppal.

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Egy asztal körül 12 gyerek ül, mindegyikük sárga vagy kék pólóban van. Az asztal körül ülők közül pontosan 6 gyerekre teljesül, hogy mindkét szomszédja sárga pólóban van.
Összesen hány sárga pólós ülhet az asztal körül?
Mutass példát minél többféle értékre és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

Megoldás. A sárga pólósok lehetséges száma 6, 7, 8 vagy 9, íme egy-egy példa:



(Teli karika jelenti a kék pólós, az üres karika a sárga pólós gyerekeket. A nyilak azokra mutatnak, akiknek mindkét szomszédjuk sárga.) (***1+1+1+1** pont*)

Más érték nem lehetséges, mivel sem 6-nál kevesebb, sem 9-nél több nem lehet a sárga pólós gyerekek száma. (***1** pont*)
Ez például a következő módon látható be:

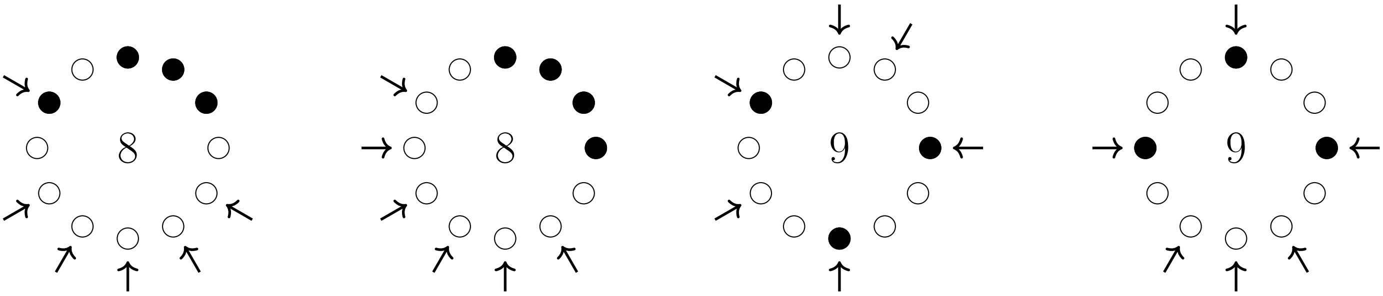
- Ha azokat a gyerekeket nézzük, akiknek mindkét szomszédja sárga pólós, akkor az ő baloldali szomszédaik különböző sárga pólós gyerekek. Tehát legalább 6 sárga pólós gyerek van.
  Alternatív indoklás: Ahhoz, hogy 6 gyereknek mindkét szomszédja sárga legyen, kell $6 \cdot 2 = 12$ sárga szomszéd; de minden sárga pólós legfeljebb két gyereknek lehet a sárga szomszédja, ezért kell legalább 6 sárga pólós gyerek. (***1** pont*)

- Ha mindenki sárga pólós lenne, akkor 12 gyereknek lenne mindkét szomszédja sárga pólós.
  Amikor egy sárga pólót kékre cserélünk, akkor a két sárga szomszéddal rendelkező gyerekek száma legfeljebb kettővel csökken. Tehát legalább 3 kék pólós gyerek kell, így a sárga pólósok legnagyobb lehetséges száma 9. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megjegyzés. 8, illetve 9 sárga pólós gyerek esetén más jó elrendezések is léteznek, például:

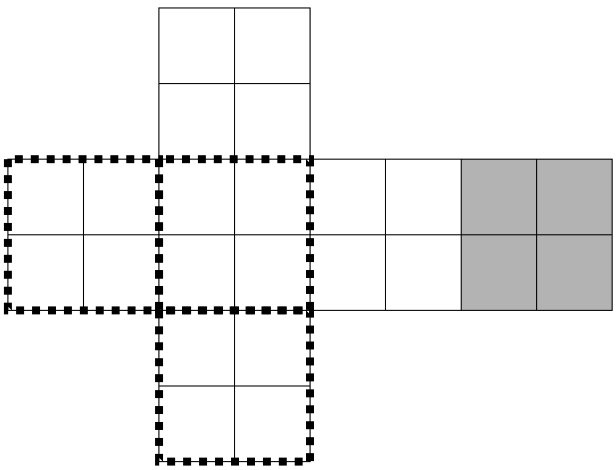


Az pedig bizonyítható, hogy 6, illetve 7 sárga póló esetén csak a fent bemutatott elrendezések – és elforgatottjaik – működnek.

5. Laci nyolc egyforma méretű szabályos dobókockából egy nagyobb kockát épít, majd leteszi az asztalra. Peti ránéz elölről, balról és felülről, majd megállapítja, hogy az így látott tizenkét szám összege 66. Neki is lát, hogy lerajzolja a nagy kocka hálóját, mely az alábbi ábrán látható (a számokat egyelőre még nem írta be). Szaggatott vonallal be is keretezte azt a három lapot, melyeket az előbb megnézett.
Mekkora lehet az asztalon fekvő (az ábrán szürke hátterű) lapokon szereplő négy szám összegének

(a) legkisebb lehetséges értéke? (b) legnagyobb lehetséges értéke?

A teljes pontszám eléréséhez egyrészt példákat kell adnod a legkisebb és a legnagyobb lehetséges értékre – azt is megadva, hogy melyik szám hol található a nagy kockán –, másrészt azt is indokolnod kell, hogy még kisebb, illetve még nagyobb összeg miért nem érhető el.
A szabályos dobókockán a szemben lévő lapokon látható számok összege 7.

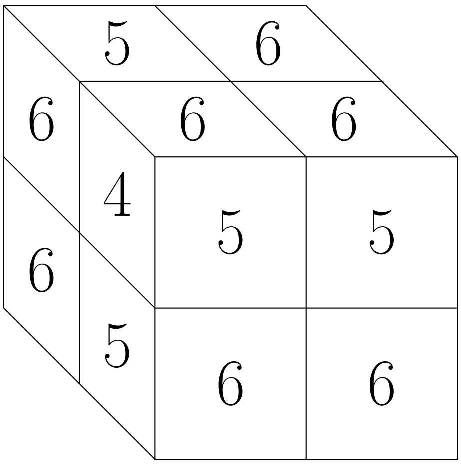


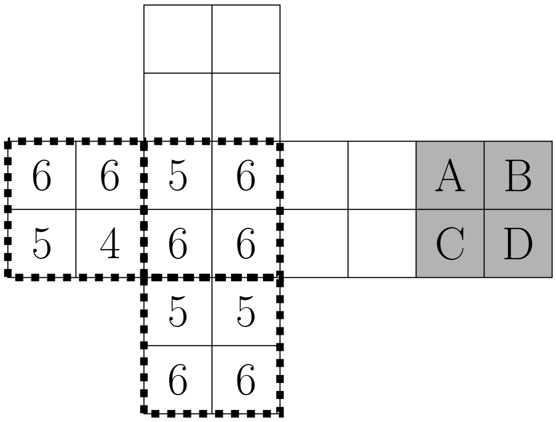
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás. A tizenkét látott dobókockalapon összesen 66 a számok összege. Ez csak úgy lehetséges, ha minden kis dobókockán a lehető legnagyobb számokat látjuk.

- Ha egy dobókockának egy lapja látszik, akkor ez a 6 (3 lap a 12-ből).
- Ha két lapja látszik, akkor az egyik 5 és a másik 6 ($3 + 3$ lap a 12-ből).
- Végül ha három lapja, akkor ezeken egy 4, egy 5 és egy 6 látható ($1 + 1 + 1$ lap a 12-ből).

Ez így összesen $3 \cdot 6 + 3 \cdot (5 + 6) + 1 \cdot (4 + 5 + 6) = 66$, vagyis tényleg csak így jöhet ki a 66, minden más esetben kevesebbet kapnánk. (***2** pont*)





A szürke lapok a felső nagy lappal vannak szemben, ezek éppen az alsó (az asztalappal érintkező) dobókockalapok.

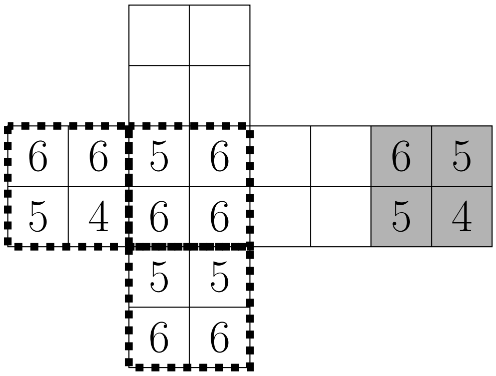
- Az alsó rétegben van egy dobókocka, amelyből semmi nem látszik, ennek bármelyik lapja érintkezhet az asztallal – tehát az ábrán A-val jelölt szürke dobókockalapon szerepelhet bármi. (***1** pont*)

- Van két alsó dobókocka, amelyekből csak egy hatos látszik. A hatossal szemközt egyes van, amely nem érhet az asztalhoz, ezért a szürke oldalukon – az ábrán B és C jelű dobókockalapokon – 2, 3, 4 vagy 5 állhat. (***1** pont*)

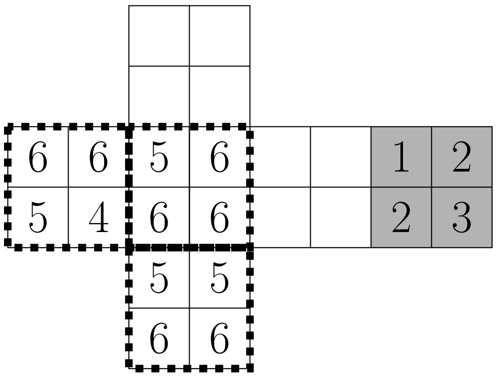
- Végül van egy alsó dobókocka, amelyből az 5 és 6 számok látszanak, ezért a velük szemben lévő 2 és 1 nem érhet az asztallaphoz. Marad – az ábrán D jelű – szürke lapnak a 3 vagy a 4. (***1** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Az eddigiek alapján a szürke lapon szereplő számok összegének maximuma $6+5+5+4=20$. Ez tényleg meg is valósítható, például úgy, ha az ábrán látható módon szerepelnek a számok a szürke lapokon: (***1** pont*)



A szürke lapon szereplő számok összegének minimuma $1+2+2+3=8$. Ez is megvalósítható, például így: (***1** pont*)



Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.