TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2022. március 18.

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyre az alábbi négy közül pontosan 2 állítás igaz?

- A szám ezresekre kerekítve 0.
- A szám százasokra kerekítve 100.
- A szám tízesekre kerekítve 470.
- A szám százasokra kerekítve 500.

Első megoldás. Írjuk fel, hogy melyik állítás milyen számtartományban teljesül és egyben jelöljük betűkkel az állításokat.

A: $1 \leq x < 500$, B: $50 \leq x < 150$, C: $465 \leq x < 475$ és D: $450 \leq x < 550$. (***1** pont*)

Ha egy számra A hamis, akkor B és C is hamis, tehát a megfelelő számokra A igaz (különben több, mint két hamis állítás lenne). (***1** pont*)

Ha egy számra C igaz, akkor D is igaz. Ezért csak olyan szám felel meg a feltételeknek, amelyre C hamis (különben több, mint két állítás lenne igaz, hiszen A már biztosan igaz). (***1** pont*)

Két lehetőség maradt:

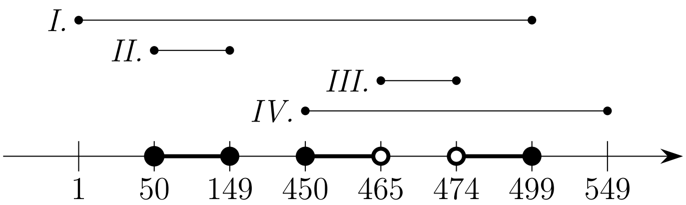
- A és B igaz, C és D hamis. Ezek éppen az $50 \leq x < 150$ számok, 100 van belőlük. (***1** pont*)
- A és D igaz, B és C hamis. A és D egyszerre a $450 \leq x < 500$ számokra teljesül, de ezek közül el kell hagynunk azokat, amelyekre C igaz. Tehát az ilyen számokra $450 \leq x < 465$ vagy $475 \leq x < 500$. Ez összesen $15 + 25 = 40$ szám. (***1** pont*)

A két esetben kapott számok között nincs átfedés, így összesen $100 + 40 = 140$ szám teljesíti a feladat feltételeit. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Második megoldás. Ábrázoljuk számegyenesen, hogy az egyes állítások mely pozitív egészek esetén igazak.



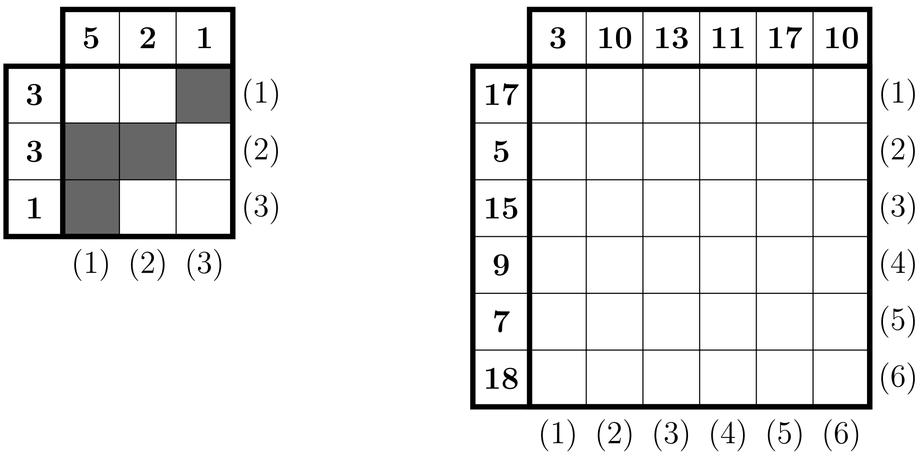
(*2 pont*)

Látható, hogy pontosan két állítás akkor teljesül az x számra, ha $50 \leq x \leq 149$ vagy $450 \leq x < 465$ vagy $474 < x \leq 499$. (*1 pont*)
Az első esetnek 100 darab, (*1 pont*)
a másodiknak 15 darab, (*1 pont*)
a harmadiknak 25 darab pozitív egész felel meg. (*1 pont*)
Tehát összesen 140 olyan pozitív egész van, amelyre pontosan két állítás igaz. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

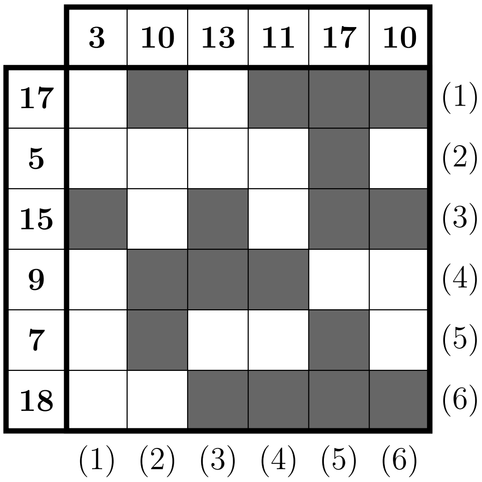
Megjegyzés. Az indoklás nélküli helyes végeredmény 2 pontot ér. Ha felsorolja a helyes számokat, de nem ír indoklást, akkor 4 pontot kapjon.

2. A bergengóc titkosszolgálat egy újfajta titkosítást fejleszt ki, melyben egy szürke és fehér mezőkből álló táblázatot akarnak kódolni. A kódolás módja a következő: minden sor elejére odaírják a sorban szereplő szürke mezők oszlopszámainak összegét, az oszlopok tetejére pedig a benne szereplő szürke mezők sorszámainak összegét.
A bal oldali ábrán egy 3×3-as táblázat titkosítása látható, a zárójelben írt számok a sor- és oszlopszámokat jelölik.
A titkosszolgálat most egy 6×6-ös táblát kapott kódolva, ez látható a jobb oldali ábrán.
Melyik mezők voltak szürkére festve a táblázatban? (Indoklás nem szükséges.)



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás.



Rossz kitöltés esetén az alábbiak alapján járjon részpontszám (mindig a jobbat véve figyelembe):

- Annyi levonás a 7-ből, ahány mezőt rosszul színezett ki a jó megoldáshoz képest.
- A jól kitölt sorokért/oszlopokért:
  1-2 db esetén 1 pont, 3-4 db esetén 2 pont, 5-6 db esetén 3 pont, 7-8 db esetén 4 pont, 9-10 db esetén 5 pont, 11 db esetén 6 pont. Itt a jól kitöltött sor/oszlop azt jelenti, hogy az összeg megfelelő
  (nem kell megegyeznie a teljesen jó megoldásban szereplő sorral/oszloppal).

Összesen: 7 pont

3. Felírtuk az összes olyan római számot, amelyben az M, D, C, L, X, V, I betűk mindegyike pontosan egyszer szerepel. Mennyi az így felírt számok összege?

Emlékeztetőül, az egyes betűk értéke: M=1000, D=500, C=100, L=50, X=10, V=5, I=1.

Megoldás. Táblázatba foglaljuk a lehetséges eseteket. (***4** pont*)

ezresek	százasok	tízesek	egyesek	érték
M	DC	LX	VI	$1000 + 600 + 60 + 6 = 1666$
M	DC	LX	IV	$1000 + 600 + 60 + 4 = 1664$
M	DC	XL	VI	$1000 + 600 + 40 + 6 = 1646$
M	DC	XL	IV	$1000 + 600 + 40 + 4 = 1644$
M	CD	LX	VI	$1000 + 400 + 60 + 6 = 1466$
M	CD	LX	IV	$1000 + 400 + 60 + 4 = 1464$
M	CD	XL	VI	$1000 + 400 + 40 + 6 = 1446$
M	CD	XL	IV	$1000 + 400 + 40 + 4 = 1444$

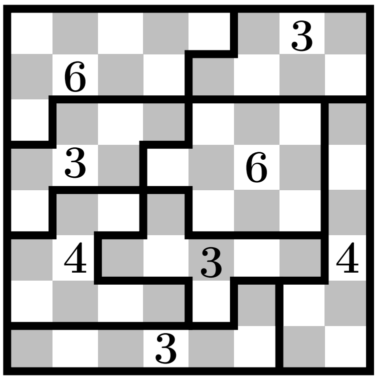
Más lehetőség nincs. Az M nem állhat a százasoknál, mert akkor C meg kellene, hogy előzze, de úgy D-nek nem marad hely. Hasonlóan C nem állhat a tízeseknél, mert akkor X megelőzi, de úgy L-nek nem marad jó pozíció. Hasonlóan X sem állhat az egyeseket leíró csoportban. (***2** pont*)

A nyolc szám összege 12440. (***1** pont*)

Megjegyzés. Az összegzés egyszerűsíthető, ha észrevesszük, hogy van nyolc darab ezresünk és a százasok négy ezres csoportba oszthatók, majd a tízesek négy százas csoportba oszthatók végül az egyesek négy tízes csoportba oszthatók. Tehát az összeg $8000 + 4000 + 400 + 40 = 12440$.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

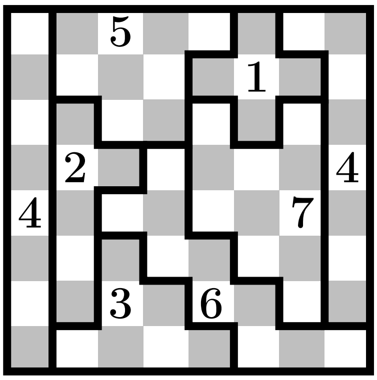
4. Ricsi szétvágta a sakktábláját rácsvonalak mentén, méghozzá úgy, hogy a keletkező összefüggő darabok mindegyikébe pontosan 4 sötét mező esett. Ezután minden darabra ráírta, hogy hány világos mező szerepel benne. Legfeljebb hány különböző számot írhatott így a darabokra?
A teljes pontszámhoz példát kell mutatnod szétvágásra a lehető legtöbb különböző értékkel, és indokolnod kell azt is, hogy miért ez a legtöbb.



Ricsi egy hagyományos, azaz 8×8-as méretű sakktáblát vágott szét.
Egy darabot akkor nevezünk összefüggőnek, ha bármelyik mezőjéről el lehet jutni bármelyik másik mezőjére úgy, hogy menet közben csak élszomszédos mezőkre lépünk.
Az ábrán egy lehetséges szétvágás látható, amelynél 3-féle értéket (3, 4, 6) írt a darabokra Ricsi.

Megoldás. Legfeljebb hét különböző számot írhatott Ricsi a darabokra. Ez azért igaz, mert legalább egy fehér mező minden darabhoz tartozik (fekete mezők sosem élszomszédosak), (***1** pont*)
és nyolc különböző érték esetén legalább $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$ fehér mezőre lenne szükség, de csak 32 van. (***2** pont*)

Megadunk egy példát, ahol hét különböző szám van felírva a darabokra. (***4** pont*)



Megjegyzés: Ha valaki csak 6-ra talál példát, akkor 2, ha csak 5-re, akkor 1 pontot kapjon a konstrukciós feladatrészre. Ha valaki csak 9-re tudja belátni, hogy nem lehetséges, akkor 1 pontot kapjon a bizonyítás részre.

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
Körben mindannyian a következőt mondják: „Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”.
Ezután mindenki feláll, majd véletlenszerű sorrendben visszaül az asztalhoz.
Ha a helycsere után megkérdezzük mindenkitől, hogy „Igaz-e most, hogy egy igazmondó és egy hazudós között ülsz?”, akkor legkevesebb hány „Igen” választ kaphatunk?

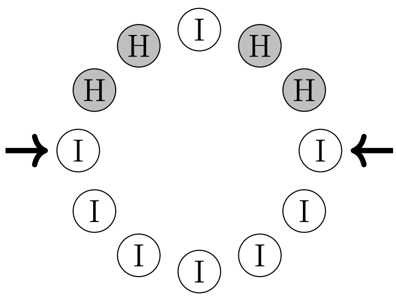
Megoldás. Jelölje I az igazmondókat és H a hazudósokat. Egy igazmondó akkor mondhatta, hogy „Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”, ha ez tényleg így van. Egy hazudós pedig akkor, ha mindkét szomszédja igazmondó, vagy mindkettő hazudós. (***1** pont*)

Ha mindenki hazudós, akkor helycsere után 12 „Igen” választ fogunk kapni. (***1** pont*)

Ha nem mindenki hazudós, akkor van legalább egy igazmondó, akinek legalább egyik szomszédja hazudós. $IH\ldots$ Ekkor a szomszédos hazudós következő szomszédja csak igazmondó lehet, és ennek a igazmondónak a következő szomszédja megint csak igazmondó: $IHII\ldots$ Most megint hazudós következik, és a kör csak egyféle módon fejezhető be: $IHIIHIIHIIHI$. Azaz ebben az esetben 8 igazmondó és 4 hazudós van. (***2** pont*)

Ekkor helycsere után is biztosan lesz egy legalább két, egymás mellett ülő igazmondóból álló szakasz. Ennek a szakasznak a két szélén ülő egy-egy igazmondó biztosan egy igazmondó és egy hazudós között fog ülni, tehát „Igen” választ fog adni a kérdésre. Így biztosan lesz legalább két „Igen”. (***1** pont*)

Elérhető, hogy csak két „Igen” legyen, például az alábbi elrendezéssel a helycsere után:



Ebben az elrendezésben a két nyíllal megjelölt igazmondó igennel válaszol a kérdésre, mindenki más pedig nemmel. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.