TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2022. március 18.

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

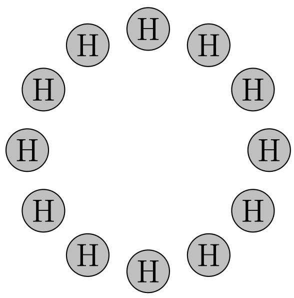
1. Egy asztal körül 12 ember ül, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak.
Körben mindannyian a következőt mondják: „Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”.
Ha megkérdezzük mindenkitől, hogy „Igaz-e, hogy valamelyik szomszédod igazmondó?”, hány „Igen” választ kaphatunk?

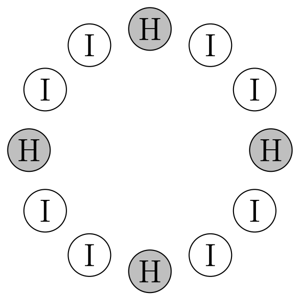
Megoldás. Jelölje I az igazmondókat és H a hazudósokat. Egy igazmondó akkor mondhatta, hogy „Egy igazmondó és egy hazudós között ülök”, ha ez tényleg így van. Egy hazudós pedig akkor, ha mindkét szomszédja igazmondó, vagy mindkettő hazudós. (***1** pont*)
Ezek alapján csupán két lehetőség van az ülésrendre.

- Lehetséges, hogy mindenki hazudós. (***1** pont*)
- Ha nem mindenki hazudós, akkor van legalább egy igazmondó. Ennek az igazmondónak pontosan az egyik szomszédja hazudós (hiszen igazat mond). $IH\ldots$

  Ekkor a szomszédos hazudós következő szomszédja csak igazmondó lehet, és ennek a igazmondónak a következő szomszédja megint csak igazmondó: $IHII\ldots$

  Most megint hazudós következik, és a kör csak egyféle módon fejezhető be. (***3** pont*)





Most mindenkitől azt kérdezzük, „Igaz-e, hogy valamelyik szomszédod igazmondó?”, amire az első elrendezésben minden hazudós igennel válaszol. Ez 12 igen.

A második elrendezésben a igazmondók igennel, a hazudósak nemmel válaszolnak, ez 8 igen.

Tehát az igenek lehetséges száma 8 vagy 12. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: `www.titnet.hu`; `www.kalmarverseny.hu`
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.

Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

Megoldás. A két kilométerkő közötti $100 - 16 = 84$ km távolságot $225 - 1 = 224$ egyenlő szakaszra tagolják a póznák, ezért egy szakasz hossza kilométerben mérve $\frac{84}{224} = \frac{3}{8}$. (***2*** *pont*)

Legyen a feladatban említett különleges pózna sorszáma k. Kétféleképpen is felírhatjuk ennek a póznának az 1-es póznától mért távolságát, amiből a következő egyenletet kapjuk:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8} = k - 16$$

(***2*** *pont*)

Az egyenlet bal oldala a póznák közti egyenlő távolságokkal fejezi ki a távolságot, a jobb oldal pedig kilométerben, a kilométerkövek alapján.

Az egyenletet megoldva:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8} = k - 16 \quad\Rightarrow\quad 3k - 3 = 8k - 128 \quad\Rightarrow\quad 125 = 5k \quad\Rightarrow\quad 25 = k$$

(***2*** *pont*)

Tehát a 25-ös számú oszlopról van szó. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

3. Egy pozitív egész számot *egyhangú*nak nevezünk, ha a számjegyeinek több, mint fele egyforma. Például a 2022, a 100, a 33 és a 7 mind egyhangúak; de a 2021 és 2020 egyike sem egyhangú. Hány 2022-nél kisebb egyhangú pozitív egész szám van?

Megoldás. Felsoroljuk a lehetséges eseteket.

- Minden egyjegyű $\overline{a}$ szám jó. Ez $\boxed{9}$ eset. (***1** pont*)

- A kétjegyű számok közül azok jók, amelyeknek a két jegye azonos ($\overline{aa}$). Ez is $\boxed{9}$ eset. (***1** pont*)

- A háromjegyű számok közül az $\overline{aaa}$, $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ és $\overline{baa}$ alakúak felenek meg. Ez rendre $\boxed{9}$, $\boxed{81}$, $\boxed{81}$ és $\boxed{81}$ eset. (Az első jegy nem lehet nulla, továbbá a és b különböznek.) (***2** pont*)

- A négyjegyű számok közül az $\overline{aaaa}$, $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$, $\overline{abaa}$ és $\overline{baaa}$ alakúak felenek meg, de ezek közül csak azok, amelyek kisebbek 2022-nél.
  - Csupa egyenlő jegy csak az 1 lehet. Ez $\boxed{1}$ eset.
  - Az $\overline{aaab}$, $\overline{aaba}$ és $\overline{abaa}$ esetekben a csak 1 lehet, b pedig kilenc féle. Ez rendre $\boxed{9}$, $\boxed{9}$ és $\boxed{9}$ lehetőség.
  - Végül a $\overline{baaa}$ esetben vagy $b = 1$ és akkor a-ra $\boxed{9}$ lehetőség marad, vagy $b = 2$ és akkor a csak nulla lehet, ez $\boxed{1}$ eset. (***2** pont*)

Összesen $9+9+9+81+81+81+1+9+9+9+9+1 = \boxed{308}$ egyhangú, 2022-nél kisebb szám van. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Bonts fel

(a) egy szabályos ötszöget (b) egy négyzetet

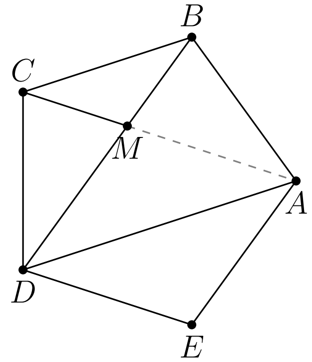
négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

Megoldás.

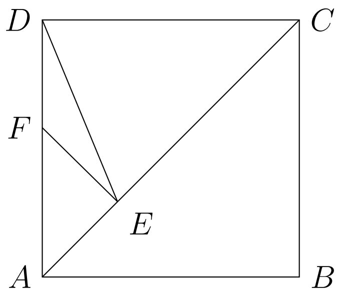
a) Az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlójának metszéspontja legyen M. Az ábrán látható DAE, ADB, DMC és BCM háromszögek páronként nem egybevágóak, és mindegyik egyenlőszárú. (***1** pont*)

ADE és BCM szögei 36°, 36° és 108°.
ADB és CMD szögei 72°, 72° és 36°. (***1** pont*)

Az (a) rész összesen: 2 pont



b) Az ábrán látható felbontás így kapható: a négyzet egyik átlójára (AC) rámérjük a négyzet oldalát ($CD = CE$), majd az átlón kapott (E) pontban merőlegest állítunk az átlóra (EF). (***2** pont*)



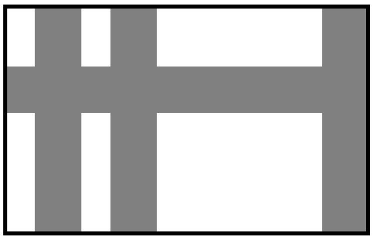
Kiszámoljuk a kapott háromszögek szögeit és ezzel igazoljuk a felbontás helyességét is.

- ABC egyenlő szárú és derékszögő, ezért belső szögei 45°, 90° és 45°.
  Így $EAF\sphericalangle$ is 45°, $AEF\sphericalangle = 90°$ (így vettük fel), következésképpen $AFE\sphericalangle = 45°$. Tehát AEF is egyenlőszárú és derékszögű. Mivel az átfogója rövidebb, nem lehet egybevágó ABC háromszöggel. (***1** pont*)
- $CD = CE$, ezért mivel $DCE\sphericalangle = 45°$, így $CDE\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 135°/2 = 67{,}5°$. (***1** pont*)
- Végül a DEF háromszög szögei kivonásokkal kaphatók meg: $FDE\sphericalangle = 90° - EDC\sphericalangle = 22{,}5°$, $DFE\sphericalangle = 180° - 45° = 135°$ és $DEF\sphericalangle = 180° - (135° + 22{,}5°) = 22{,}5°$.
  Tehát DEF is valóban egyenlő szárú. (***1** pont*)

A (b) rész összesen: 5 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. A Bergengóc Abroszgyárban kizárólag olyan asztalterítőket készítenek, amelyek téglalap alakúak, és fehér alapon szürke sávokkal vannak tagolva. Minden szürke sáv párhuzamos a téglalap valamelyik oldalával és pontosan 3 cm széles. A 2022 tavaszi kollekcióban ráadásul csupa olyan modellt dobtak piacra, amelynek területe pontosan fele részben szürke és fele részben fehér.
Az ábrán a kollekció legkisebb, 24 cm × 15 cm-es méretű modelljének méretarányos rajza látható.



Szerepelhet-e a 2022 tavaszi kollekcióban olyan asztalterítő, amelynek mérete:

(a) 195 cm × 200 cm (b) 200 cm × 205 cm?

A párhuzamos szürke sávok között mindig maradnia kell fehér résznek, de ennek szélessége lehet akármilyen kicsi, akár 1 cm-nél kisebb is.

Megoldás. (a) Ilyen asztalterítő szerepelhet a kollekcióban: megfelel, ha 13 vízszintes és 25 függőleges sávot használunk. (***2** pont*)
Ez esetben a sávoknak van elég hely, hiszen $13 \cdot 3 < 195$ és $25 \cdot 3 < 200$. A szürke rész területe pedig

$$\underbrace{13 \cdot 3 \cdot 200}_{\text{vízszintes sávok}} + \underbrace{25 \cdot 3 \cdot 195}_{\text{függőleges sávok}} - \underbrace{13 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{kétszeresen fedett rész}} = 7800 + 14625 - 2925 = 19500 \text{ cm}^2,$$

amely valóban a teljes terület fele. (***3** pont*)

(b) Egy vízszintes és egy függőleges sáv is olyan egész oldalhosszúságú téglalapot fed le az eredeti téglalapból, amelynél az egyik oldal hossza centiméterben mérve hárommal osztható. Egy-egy vízszintes és függőleges sáv közös része pedig mindig egy 3 cm × 3 cm-es négyzet. Ezért a sávok által lefedett terület négyzetcentiméterben mérve mindig 3-mal osztható. (***1** pont*)
A 200 cm × 205 cm méretű terítő területének fele 20500 cm^2, ez nem osztható hárommal, ezért ilyen darab nem szerepelhet a kollekcióban. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Az (a) változatban a 13 vízszintes és 25 függőleges sáv az egyetlen lehetséges megoldás. Tegyük fel ugyanis, hogy x darab vízszintes és y darab függőleges sávot használunk. Ekkor a fehér terület átrendezhető egy $(195 - 3x)$ cm × $(200 - 3y)$ cm-es téglalappá. Tehát

$$(195 - 3x)(200 - 3y) = 19500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13,$$

ahol a bal oldalon mindkét tényező pozitív egész. Hárommal osztva az első tényező 0, míg a második 2 maradékot ad. Mindkettő legfeljebb 200, és legalább 98. A lehetőségeket megvizsgálva csak a $156 \cdot 125$ szorzat a megfelelő, amiből $x = 13$ és $y = 25$.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.