TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2022. március 18..

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy hosszú, egyenes országút egy szakaszával párhuzamosan halad egy nagyfeszültségű elektromos távvezeték. A vezetéket egyenlő távolságközökkel elhelyezett villanyoszlopok tartják, melyek sorban meg is vannak számozva. Az 1-es számú pózna éppen a 16-as kilométerkőnél helyezkedik el, a 225-ös számú pózna pedig a 100-as kilométerkőnél.

Érdekes módon van egy olyan villanyoszlop, amely éppen a vele azonos számú kilométerkőnél áll. Hányas számú oszlopról van szó?

Megoldás. A két kilométerkő közötti $100-16=84$ km távolságot $225-1=224$ egyenlő szakaszra tagolják a póznák, ezért egy szakasz hossza kilométerben mérve $\frac{84}{224}=\frac{3}{8}$. (***2*** *pont*)

Legyen a feladatban említett különleges pózna sorszáma k. Kétféleképpen is felírhatjuk ennek a póznának az 1-es póznától mért távolságát, amiből a következő egyenletet kapjuk:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8}=k-16$$

(***2*** *pont*)

Az egyenlet bal oldala a póznák közti egyenlő távolságokkal fejezi ki a távolságot, a jobb oldal pedig kilométerben, a kilométerkövek alapján.

Az egyenletet megoldva:

$$(k-1)\cdot\frac{3}{8}=k-16 \quad\Rightarrow\quad 3k-3=8k-128 \quad\Rightarrow\quad 125=5k \quad\Rightarrow\quad 25=k$$

(***2*** *pont*)

Tehát a 25-ös számú oszlopról van szó. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. Hány olyan háromjegyű szám van, amely nem tartalmaz 9-es számjegyet, és a számjegyeinek összege páros?

Első megoldás. A számjegyek paritása szerint csoportosítva a megfelelő számokat négy esetet különböztethetünk meg. (***2** pont*)

- *páros - páros - páros*: A százasok helyén nem állhat nulla, ezért ez összesen $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ szám. (***1** pont*)
- *páros - páratlan - páratlan*: Mivel 9-es számjegy nem megengedett, csak négy páratlan jegyből választhatunk. Az esetek száma $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. (***1** pont*)
- *páratlan - páros - páratlan*: $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ szám. (***1** pont*)
- *páratlan - páratlan - páros*: $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ szám. (***1** pont*)

Az eseteket összeszámolva azt kapjuk, hogy $100 + 64 + 80 + 80 = 324$ háromjegyű szám felel meg a feladat feltételeinek. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Második megoldás. Először megszámoljuk a 9-es számjegyet nem tartalmazó háromjegyű számokat. Ilyenből $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ van, hiszen az első helyen nem állhat 0 és 9, a másik két helyen nem állhat 9. (***2** pont*)

A kilencest nem tartalmazó számokat párokba rendezhetjük úgy, hogy az $\overline{abc}$ szám párja a $\overline{(9-a)bc}$ (például 546 párja 446). Mivel $9 - a$ nem lehet egyenlő a-val, a párok elemei különböznek, továbbá minden szám pontosan egy párban szerepel. Az is igaz, hogy $1 \leq a \leq 8$ miatt $1 \leq 9 - a \leq 8$. (***2** pont*)

a és $9 - a$ paritása ellentétes, ezért minden párban pontosan az egyik tagra igaz, hogy számjegyei összege páros. (***2** pont*)

Tehát a fent említett 648 háromjegyű számnak éppen a fele megfelelő, ez 324 szám. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Bonts fel

(a) egy szabályos ötszöget (b) egy négyzetet

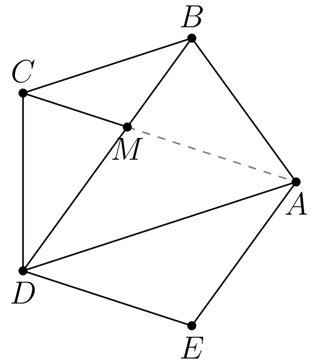
négy darab, páronként nem egybevágó egyenlőszárú háromszögre, és határozd meg a felbontásban szereplő egyenlőszárú háromszögek szögeit.

Megoldás.

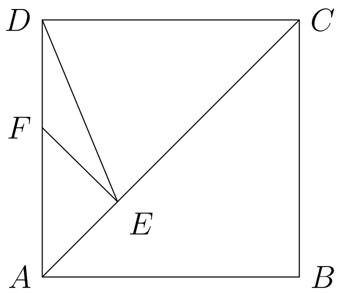
a) Az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlójának metszéspontja legyen M. Az ábrán látható DAE, ADB, DMC és BCM háromszögek páronként nem egybevágóak, és mindegyik egyenlőszárú. (***1** pont*)

ADE és BCM szögei 36°, 36° és 108°.
ADB és CMD szögei 72°, 72° és 36°. (***1** pont*)

Az (a) rész összesen: 2 pont



b) Az ábrán látható felbontás így kapható: a négyzet egyik átlójára (AC) rámérjük a négyzet oldalát ($CD = CE$), majd az átlón kapott (E) pontban merőlegest állítunk az átlóra (EF). (***2** pont*)



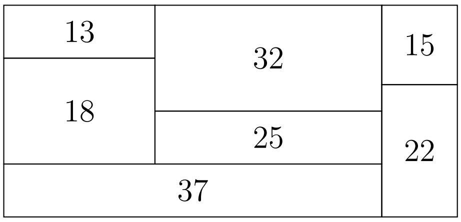
Kiszámoljuk a kapott háromszögek szögeit és ezzel igazoljuk a felbontás helyességét is.

- ABC egyenlő szárú és derékszögő, ezért belső szögei 45°, 90° és 45°.
  Így $EAF\sphericalangle$ is 45°, $AEF\sphericalangle = 90°$ (így vettük fel), következésképpen $AFE\sphericalangle = 45°$. Tehát AEF is egyenlőszárú és derékszögű. Mivel az átfogója rövidebb, nem lehet egybevágó ABC háromszöggel. (***1** pont*)
- $CD = CE$, ezért mivel $DCE\sphericalangle = 45°$, így $CDE\sphericalangle = DEC\sphericalangle = 135°/2 = 67{,}5°$. (***1** pont*)
- Végül a DEF háromszög szögei kivonásokkal kaphatók meg: $FDE\sphericalangle = 90° - EDC\sphericalangle = 22{,}5°$, $DFE\sphericalangle = 180° - 45° = 135°$ és $DEF\sphericalangle = 180° - (135° + 22{,}5°) = 22{,}5°$.
  Tehát DEF is valóban egyenlő szárú. (***1** pont*)

A (b) rész összesen: 5 pont

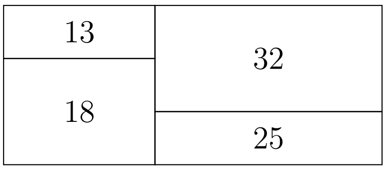
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Egy nagy téglalapot felosztottunk kisebb téglalapokra, és a felosztásról egy **nem méretarányos** ábrát is készítettünk:



Minden kis téglalapra ráírtuk a **kerület**ét. Lehet-e a nagy téglalap kerülete több, mint 60 egység?

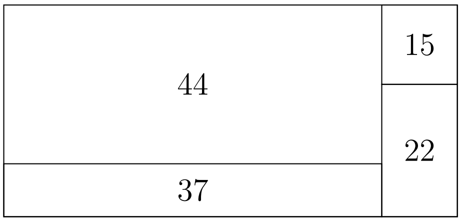
Megoldás. Először vizsgáljuk meg a bal felső sarokban elhelyezkedő, négy részre vágott téglalap kerületét.



Mind a négy kis téglalap egy vízszintes és egy függőleges oldalával, azaz a kerülete felével vesz részt a négy részre vágott téglalap kerületében. (Másképpen: A négy kis téglalap oldalai együttesen lefedik a nagy téglalap kerületét, továbbá a „belső” oldalak még egyszer kiadják a teljes kerületet.) (***2** pont*)

Ezért $13 + 18 + 32 + 25 = 88$ a négy részre vágott téglalap kerületének duplája. (***1** pont*)
A négy részre vágott téglalap kerülete tehát 44 egység. (***1** pont*)

A kapott értékkel és a bal felső sarokban lévő négy téglalap összevonásával most a következő egyszerűbb felosztást kaptuk:



Most ismét használjuk az előző észrevételünket, mely szerint a kis téglalapok kerületének összege éppen a nagy téglalap kerületének duplája. (***1** pont*)
Azt kaptuk tehát, hogy a kérdéses kerület egyértelműen meghatározható,
értéke $(44 + 37 + 15 + 22)/2 = 59$ egység. (***1** pont*)
Vagyis a téglalap kerülete nem lehet nagyobb 60 egységnél. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: `www.titnet.hu`; `www.kalmarverseny.hu`
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. (a) Adj meg négy különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a négy számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével.
(b) Meg lehet-e adni 2022 különböző pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy akárhogyan osztom két csoportra ezt a 2022 számot, az egyik csoportban szereplő számok összege osztható a másik csoportban szereplő számok összegével?
A csoportok lehetnek különböző elemszámúak.

Megoldás. (a) Az $(1; 2; 3; 54)$ számnégyes megfelelő. (***1** pont*)
Az 54-et nem tartalmazó csoportban szereplő számok összege legalább 1 és legfeljebb 6, és ez mindig osztója a másik csoport összegének: $1 \mid 59$, $2 \mid 58$, $3 \mid 57$, $4 \mid 56$, $5 \mid 55$, $6 \mid 54$. (***1** pont*)

(b) Megadható 2022 darab megfelelő szám. Vegyük például az $1; 2; 3; \ldots; 2021$ számokat, ezek összege legyen S. Megmutatjuk, hogy az $S! - S$ számot (amely nyilván különbözik tőlük) ezekhez hozzávéve a feltételnek megfelelő számokat kapunk. (***2** pont*)

A 2022 darab szám összege $S!$. Vegyünk egy tetszőleges csoportosítást, és jelöljük az $S! - S$ számot nem tartalmazó csoportban a számok összegét N-nel, ekkor a másik csoport összege $S! - N$.

Mivel N az $1; 2; 3; \ldots; 2021$ számok közül néhánynak az összege, így nem nagyobb S-nél. Ekkor viszont osztója $S!$-nak, így az $S! - N$ számnak is. Tehát az egyik csoport számainak összege osztója a másik csoport számai összegének. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Az (a) feladatrészhez az $(1; 2; 3; 54)$ az egyetlen jó számnégyes, amelynek mindegyik tagja 100-nál kisebb. Az $(1; 2; 3; 60k + 54)$ négyes minden $k \in \mathbb{N}$ esetén megfelelő. Néhány további jó számnégyes például: $(1; 2; 4; 413)$, $(1; 4; 5; 170)$, $(2; 3; 4; 1251)$.

Általában, ha $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ különböző pozitív egészek ($n \geq 3$), melyek összege S, és T pedig a belőlük képezhető valamennyi (akár egytagú) összegnek közös többszöröse, akkor az $a_n = T - S$ választással megfelelő n-est kapunk.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.