TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2022. május 27.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.

Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

Megoldás. Az 1 csak a bal felső sarokba kerülhet, az 5 pedig valamelyik sor végére. Öt megoldás van:

1	2	3
4	5	

1	2	4
3	5	

1	3	4
2	5	

1	2	5
3	4	

1	3	5
2	4	

(**7** *pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: 1 talált megoldásért 1, 2-ért 2, 3-ért 3, 4-ért 5 pont járjon. Ha rossz elrendezés is van a megadottak között, akkor a rossz elrendezések számától függetlenül 1 pont levonást kapjon a versenyző.

2. Öt különböző magasságú gyerek áll egy sorban. Az alábbiakat tudjuk róluk:

- Mindenki tud legalább két másik ember szemébe nézni.
- Andris a legmagasabb, de nem látja Bélát.
- Cili Dénes mellett áll, és rajta kívül még pontosan egy ember szemébe tud nézni.
- Endre áll a bal szélen, és alacsonyabb, mint Cili.

Milyen sorrendben állnak a sorban és mi a magasságbeli sorrendjük?

Két gyerek pontosan akkor tud egymás szemébe nézni, ha kettőjük közt nincs olyan gyerek, aki magasabb lenne bármelyiküknél.

Megoldás. Andris nem állhat balról a második helyen, mert akkor Endre csak őt látná. Mivel Andris és Béla között kell lennie valakinek (Andris nem látja Bélát), továbbá Cili és Dénes között nem állhat senki, csak az lehet, hogy Béla balról a második és Andris a jobb szélen áll. (***1** pont*)

Béla alacsonyabb, mint Endre, különben Endre csak Bélát látná. (***1** pont*)

Cili nem állhat középen, mert akkor a két szomszédján (Béla és Dénes) kívül még Endrét is látná. (***1** pont*)

Tehát az egyetlen lehetséges sorrend: Endre, Béla, Dénes, Cili, Andris. (***1** pont*)

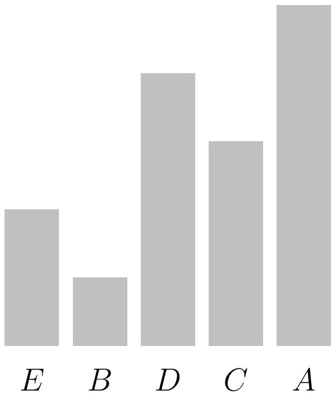
Most megállapítjuk a magassági sorrendet. Az egyszerűség kedvéért az öt gyerek magasságát az 1,2,3,4,5 számoknak feleltetjük meg, mivel csak a magasság szerinti sorrendjük érdekel minket.

Cili pontosan két embert lát, ezért Dénes is magasabb nála. Ellenkező esetben ugyanis Dénes és Béla nem tudná eltakarni előle Endrét. (Azt már tudjuk, hogy Béla alacsonyabb Endrénél.) (***1** pont*)

Mivel Cili így legfeljebb 3 magasságú, és nála alacsonyabb a feltétel szerint Endre, akinél pedig alacsonyabb Béla, így csak az a lehetőség maradt, hogy Endre 2, Béla 1, Cili pedig 3 magasságú. (***1** pont*)

Azt tudjuk, hogy Andris a legmagasabb, tehát Dénes 4 magasságú. (***1** pont*)

Az alábbi ábra szemlélteti a magassági sorrendet:



Tehát a növekvő magassági sorrend: $B < E < C < D < A$. Ellenőrizhető, hogy a kapott sorrendek minden feltételnek eleget tesznek. **Összesen: 7 pont**

Megjegyzés: Ha valaki csak a sorrendet határozza meg (indoklással), az 4 pontot kapjon. Ha valaki indoklás nélkül leírja a sorrendet, az 2 pontot kapjon, ha magasságokat is ír, akkor 3 pontot kapjon.

3. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?

El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

Megoldás. Ha veszünk egy tyúkot öt tojásért, az a tyúk a harmadik reggelre „hozza vissza” az árát, addigra már egy tojás nyereséggel. Tehát a nyolcadik és kilencedik napon már nem érdemes tyúkot venni.

Ha még több, mint két nap van hátra, és van elég tojásunk ahhoz, hogy vegyünk belőle tyúkot, akkor érdemes venni, és ha több, mint egy tyúkra elég a meglévő tojáskészlet, akkor érdemes a lehető legtöbb tyúkot venni.

Ezzel a stratégiával elérhető, hogy a tizedik napra 34 tojásunk legyen.

nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tojás	0	2	4	6	5	6	9	14	24	34
meglévő tyúk	1	1	1	1	2	3	4	5	5	5
vásárolt tyúk				+1	+1	+1	+1			

(***7** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha valaki 33-ra talált példát, 5 pontot; ha 32-re, 4 pontot; ha 30–31-re, 3 pontot; ha 28–29-re, 2 pontot; ha 25–27-re, 1 pontot kapjon. Ha valaki leírja, hogy a 7. napig érdemes tojást váltani (azaz megfogalmazza a megfelelő stratégiát), mégsem ezt a stratégiát valósítja meg, akkor az előző értékeléshez képest +2, de maximum 6 pontot kapjon. Számolási hibáért a versenyző hibánként 1 pont levonást kapjon.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4.

(a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.

(b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot.

Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):

$$\begin{array}{l}
\underline{1635} : 8 = 204 \\
\mathbf{16} \\
\ \ \mathbf{0}3 \\
\ \ \ \ \mathbf{3}5 \\
\ \ \ \ \ \ \mathbf{3}
\end{array}$$

Megoldás.

(a) Lehetséges példák: 12345768, 12341432. (***2*** *pont*)

(b) Nyolc különböző maradékot kell kapnunk, tehát a keresett szám legalább nyolcjegyű.

Induljunk egy 1-es számjeggyel, majd a soron következő jegyet mindig úgy válasszuk meg, hogy az a lehető legkisebb olyan számjegy legyen, amellyel egy korábban még nem szereplő maradékot kapjunk. Ezzel a módszerrel eljutunk a legkisebb lehetséges megoldáshoz, mert az eljárás „nem akad el”, mindig lehet jó következő jegyet választani. (A maradékokat keretezéssel jelezzük.)

$$\begin{array}{cccccccccl}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 & : & 8 = 1250376 \\
\boxed{1} & 0 & & & & & & & & \\
& \boxed{2} & 0 & & & & & & & \\
& & \boxed{4} & 0 & & & & & & \\
& & & \boxed{0} & 3 & & & & & \\
& & & & \boxed{3} & 0 & & & & \\
& & & & & \boxed{6} & 1 & & & \\
& & & & & & \boxed{5} & 5 & & \\
& & & & & & & \boxed{7} & &
\end{array}$$

Tehát a legkisebb megoldás: 10003015. (***5*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha valaki a jó módszerrel keresi a (b) rész megoldását, de számolási hibát vét, az számolási hibánként 1 pont levonást kapjon.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy pingpongbajnokságon 13 játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. A játékosok között voltak bal- és jobbkezesek is. Összesen ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes.
Legfeljebb hányszor fordulhatott elő, hogy egy balkezes játékos legyőzött egy jobbkezest?

Megoldás. A 13 játékos mindegyike 12 ellenféllel játszott, ez $13 \cdot 12 = 156$ mérkőzést jelentene, ám így mindet kétszer számoltuk, tehát valójában ennek fele, vagyis 78 mérkőzés zajlott le. A feladat szövege szerint ebből 39-et nyert balkezes és ugyanennyit jobbkezes játékos. (***2** pont*)

Ahhoz, hogy minél többször tudjon balkezes győzni jobbkezes ellen, az kell, hogy a 39 balkezes győzelem közül minél kevesebb történjen balkezes-balkezes elleni mérkőzésen. Márpedig az összes ilyen mérkőzésen balkezes nyer, tehát a balkezesek számának kell a lehető legkevesebbnek lennie. (***1** pont*)

Ha csak 3 balkezes lenne, akkor lenne 10 jobbkezes, akik az elején leírtakhoz hasonló logikát követve egymás között $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ mérkőzést játszottak. (***2** pont*)
Ez túl sok jobbkezes győzelmet jelentene. Tehát legalább 4 balkezes játékos van, ekkor ők egymás közt 6 mérkőzést játszottak, a maradék 33 balkezes győzelem pedig jobbkezes játékos ellen született. (***2** pont*)

Tehát legfeljebb 33-szor fordulhatott elő. **Összesen: 7 pont**

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.