TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2022. május 27.

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Töltsük ki az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokkal úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok.

Adjuk meg az összes lehetséges megoldást.
Nem kell bizonyítani, hogy a megtaláltakon kívül nincs megoldás. Teljes pontszám csak akkor kapható, ha sikerült az összes megoldást megtalálni.

Megoldás. Az 1 csak a bal felső sarokba kerülhet, a 6 pedig valamelyik sor végére. Kilenc megoldás van:

1	2	3	4
5	6		

1	2	3	5
4	6		

1	2	4	5
3	6		

1	3	4	5
2	6		

1	2	3	6
4	5		

1	2	4	6
3	5		

1	3	4	6
2	5		

1	2	5	6
3	4		

1	3	5	6
2	4		

(***7** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: 1–2 talált megoldásért 1, 3–4-ért 2, 5-ért 3, 6-ért 4, 7-ért 5, 8-ért 6 pont járjon. Ha rossz elrendezés is van a megadottak között, akkor a rossz elrendezések számától függetlenül 1 pont levonást kapjon a versenyző.

2. Kati néni tojásgazdálkodásba kezd. Első nap megveszi első tyúkját, ám ekkor nincs egy tojása sem. Egy tyúk minden éjszaka két tojást tojik. A termelés növeléséhez újabb tyúkokat szerezhet be napközben a piacon, tyúkonként öt tojásért cserébe. Máshonnan nem szerez be se tojást, se tyúkot; és a tyúkokat sem válthatja vissza tojásra. Kati néni szeretne a tizedik napon a lehető legtöbb tojással rendelkezni. Legfeljebb hány tojása lehet a tizedik napon?

El kell magyaráznod a módszert is, amellyel szerinted a legtöbb tojást tudja Kati néni elérni. Nem kell indokolnod, hogy több tojást máshogy nem tud szerezni. Csak akkor kaphatsz teljes pontszámot, ha a lehetséges legtöbb tojáshoz vezető módszert találtad meg, de részpontszámot akkor is kaphatsz, ha nem találod meg a legjobb megoldást.

Megoldás. Ha veszünk egy tyúkot öt tojásért, az a tyúk a harmadik reggelre „hozza vissza” az árát, addigra már egy tojás nyereséggel. Tehát a nyolcadik és kilencedik napon már nem érdemes tyúkot venni.

Ha még több, mint két nap van hátra, és van elég tojásunk ahhoz, hogy vegyünk belőle tyúkot, akkor érdemes venni, és ha több, mint egy tyúkra elég a meglévő tojáskészlet, akkor érdemes a lehető legtöbb tyúkot venni.

Ezzel a stratégiával elérhető, hogy a tizedik napra 34 tojásunk legyen.

nap	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
tojás	0	2	4	6	5	6	9	14	24	34
meglévő tyúk	1	1	1	1	2	3	4	5	5	5
vásárolt tyúk				+1	+1	+1	+1			

(***7** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha valaki 33-ra talált példát, 5 pontot; ha 32-re, 4 pontot; ha 30–31-re, 3 pontot; ha 28–29-re, 2 pontot; ha 25–27-re, 1 pontot kapjon. Ha valaki leírja, hogy a 7. napig érdemes tojást váltani (azaz megfogalmazza a megfelelő stratégiát), mégsem ezt a stratégiát valósítja meg, akkor az előző értékeléshez képest +2, de maximum 6 pontot kapjon. Számolási hibáért a versenyző hibánként 1 pont levonást kapjon.

3.

(a) Adjunk meg egy olyan számot, amelyiknek a 8-cal való írásbeli osztása során mindegyik maradék előfordul.

(b) Adjuk meg a legkisebb ilyen számot.

Az 1635 osztása során például háromféle maradék fordul elő: a 0, az 1 és a 3 (a 3 kétszer is):

$$
\begin{array}{l}
\underline{1635} : 8 = 204 \\
\mathbf{16} \\
\;\;\mathbf{0}3 \\
\;\;\;\;\mathbf{3}5 \\
\;\;\;\;\;\;\mathbf{3}
\end{array}
$$

Megoldás.

(a) Lehetséges példák: 12345768, 12341432. (***2** pont*)

(b) Nyolc különböző maradékot kell kapnunk, tehát a keresett szám legalább nyolcjegyű.

Induljunk egy 1-es számjeggyel, majd a soron következő jegyet mindig úgy válasszuk meg, hogy az a lehető legkisebb olyan számjegy legyen, amellyel egy korábban még nem szereplő maradékot kapjunk. Ezzel a módszerrel eljutunk a legkisebb lehetséges megoldáshoz, mert az eljárás „nem akad el”, mindig lehet jó következő jegyet választani. (A maradékokat keretezéssel jelezzük.)

$$
\begin{array}{cccccccccl}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 5 & : & 8 = 1250376 \\
\boxed{1} & 0 & & & & & & & & \\
 & \boxed{2} & 0 & & & & & & & \\
 & & \boxed{4} & 0 & & & & & & \\
 & & & \boxed{0} & 3 & & & & & \\
 & & & & \boxed{3} & 0 & & & & \\
 & & & & & \boxed{6} & 1 & & & \\
 & & & & & & \boxed{5} & 5 & & \\
 & & & & & & & \boxed{7} & &
\end{array}
$$

Tehát a legkisebb megoldás: 10003015. (***5** pont*)

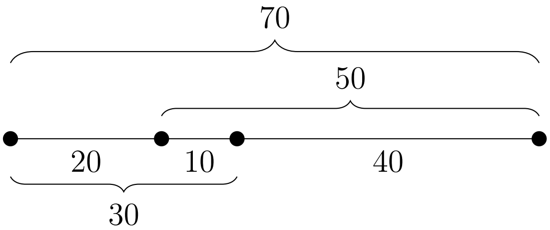
Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha valaki a jó módszerrel keresi a (b) rész megoldását, de számolási hibát vét, az számolási hibánként 1 pont levonást kapjon.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

Megoldás. Mutatunk egy példát arra, hogy a hatodik távolság lehet 70 cm, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem lehet. A példában a négy pont egy egyenesre esik.



(***3*** *pont*)

Legyen a négy pont A, B, C és D, az ismeretlen távolság pedig AB. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB \leq AC + CB$, illetve $AB \leq AD + DB$. (***1*** *pont*)
Ebből $2AB \leq AC+CB+AD+DB \leq 140$, hiszen AC, CB, AD, DB mind lemért távolságok, amelyek közül a négy legnagyobb összege $50 + 40 + 30 + 20 = 140$. (***2*** *pont*)
Ezért $AB \leq 70$. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5.

(a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

(b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

Megoldás.

(a) A négy szám közül az összeg a legnagyobb, ezért ennek négyjegyűnek, így legalább 1000-nek kell lennie. (***1*** *pont*)

Mivel a kisebb összeadandó legfeljebb 99, a másik 900-nál nagyobb, tehát biztosan háromjegyű. (***2*** *pont*)

Így a különbség egyrészt legfeljebb kétjegyű lehet, másrészt egy 900-nál nagyobb számból kell elvenni egy 100-nál kisebbet, ami 800-nál nagyobb. (***2*** *pont*)

Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges, hogy a négy felírt szám között szerepeljen egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

(b) Lehetséges. Ha az első két szám a 150 és az 50, akkor a szorzatuk 7500, a hányadosuk pedig 3. Mind a négy leírt szám pozitív egész, és valóban szerepel közöttük egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.