TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

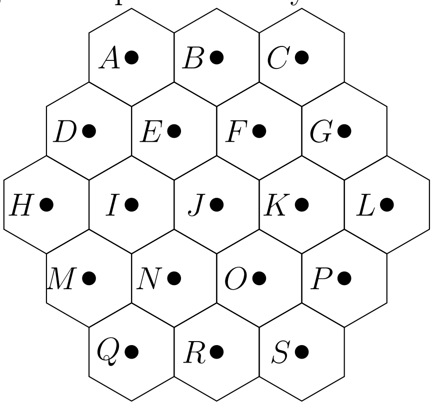
51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2022. május 28.

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy társasjáték táblája az alábbi ábrán látható módon, 19 darab szabályos hatszögből áll. Mindegyik hatszögnek megjelöltük a középpontját.
Adjunk meg minél több, különböző méretű szabályos háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa a megjelölt 19 pont valamelyike.



A háromszögeket a csúcsok megnevezésével sorold fel.

Azonos méretű háromszögekből csak egyet-egyet adj meg.

Nem kell bizonyítanod, hogy nincs más, az általad megtaláltaktól különböző méretű szabályos háromszög.

Megoldás. Az A csúcsot rögzítjük, és úgy soroljuk fel a lehetséges méreteket, hogy A-tól egyre messzebb lévő pontokat keresünk második csúcsnak.

Hat különböző méretű szabályos háromszög: ABE, AFI, ACJ, AGN, ALQ és BMP. (**7** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha valaki nem találta meg az összeset, akkor annyi pontot kapjon, ahányat megtalált. (Azaz minden megtalált háromszög-típus 1-1 pontot ér, és ha mind a 6 megvan, akkor jár a 7. extra pont). Ha rossz csúcshármas is van a megadottak között, akkor ezek számától függetlenül 1 pont levonást kapjon a versenyző.

2. Sanyi a Harry Potter-napokon szeretné megnézni mind a nyolc filmet a kedvenc mozijában. A moziban három napon adják a filmeket, mindhárom napon 1-2-3-4-5-6-7-8 sorrendben, és Sanyi is ilyen sorrendben szeretné látni őket, mindegyiket pontosan egyszer. A filmek megnézését több napra is oszthatja, de lehetnek olyan napok, amikor egy részt se néz meg.
Hányféleképpen teheti ezt meg?

Megoldás. Aszerint csoportosítjuk az eseteket, hogy Sanyi néz-e filmet a második napon.

- Ha a második napon Sanyi nem megy moziba, akkor a nyolc filmet az első és a harmadik nap között osztja szét, beleértve azt is, hogy mindet megnézi egyetlen nap alatt. Ez $\boxed{9 \text{ eset}}$, mert az első napon $0, 1, 2 \ldots, 8$ részt láthat. (***2** pont*)

- Ha a második napon megy moziba Sanyi, akkor elég azt megszámolni, hogy melyik résszel kezd és melyikkel fejezi be ezen a napon, mert innen egyértelmű, hogy az első és a harmadik napon mit kell megnéznie.

  - Ha csak egy részt lát a második napon, az nyolcféle lehet, ez $\boxed{8 \text{ eset}}$. (***2** pont*)

  - Ha legalább két részt, akkor az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmazból kell 2 számot választania (második napi első és utolsó résznek), ez $\boxed{\frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ eset}}$. (***2** pont*)

Összesen tehát $\boxed{9 + 8 + 28 = 45}$ lehetősége van Sanyinak terve végrehajtására. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3.

(a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk?

(b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

Megoldás.

(a) Nincs ilyen háromjegyű szám.

Mivel a fordított sorrendben írt jegyek 3-mal osztható számot alkotnak, ezért a jegyek összege 3-mal osztható. De mivel ez az eredeti sorrendben is így van, ezért a keresett számnak 9-cel is oszthatónak kell lennie, mert a megfordított szám egy hárommal osztható szám háromszorosa. (***1** pont*)

Az első jegy 1, 2 vagy 3, különben a szám háromszorosa már négyjegyű lenne. (***1** pont*)
Egyik eset sem ad megoldást.

- Ha az első jegy 1, akkor az utolsó csak 7 lehet, mert annak a háromszorosa végződik 1-re. Ekkor a 9-cel való oszthatóság miatt a középső jegy csak 1 lehet, de $3 \cdot 117 = 351 \neq 711$. (***1** pont*)

- Ha az első jegy 2, akkor az utolsó jegy csak 4 lehet, így a középső jegy 3, de $3 \cdot 234 = 702 \neq 432$. (***1** pont*)

- Ha az első jegy 3, akkor az utolsó 1 lenne, de a háromszoros nem lehet kisebb az eredeti számnál, ezért itt sem kapunk megoldást. (***1** pont*)

(b) Igen, van ilyen.

Az első jegy 3-nál kisebb, különben az eredeti szám négyszerese már ötjegyű lenne. Fordított sorredben írva a jegyeket néggyel osztható számot kell kapni, ezért csak páros jegy állhat az első helyen, vagyis a keresett szám 2-vel kezdődik.

Mivel az utolsó jegy négyszeresének utolsó jegye 2, ezért az utolsó jegy 3 vagy 8 lehet. Ezek közül csak a 8 jó, mert egy 2-vel kezdődő négyjegyű szám négyszerese legalább nyolcezer.

Ha a második jegy legalább 3 lenne, akkor az eredeti szám négyszerese 9000-nél több lenne, ez nem lehetséges. Viszont a fordított sorrendben írt jegyek néggyel osztható számot adnak, ez csak akkor teljesül, ha a második jegy az 1.

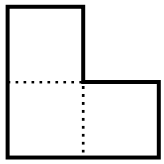
Innen már végignézhető, hogy csak akkor kapunk megoldást, ha az eredeti szám harmadik jegye a 7, ekkor $2178 \cdot 4 = 8712$. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. (a) Össze lehet-e építeni 12 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3 -as téglalappá?

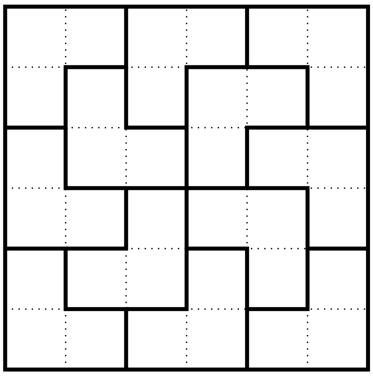
(b) Össze lehet-e építeni 18 db L-triominóból egy téglalapot úgy, hogy semelyik két triominó ne álljon össze egy 2×3-as téglalappá?



Az ábrán egy L-triominó látható. A triominókat el lehet forgatni, de oldalaiknak a téglalap oldalaival párhuzamosaknak kell lenniük. Az építés során sem hézag, sem átfedés nem keletkezhet.

Megoldás.

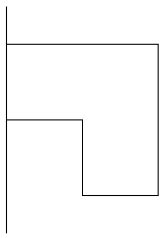
(a) Igen. $12 \cdot 3 = 36$ négyzetből áll a keresett téglalap. Példa 6×6-osra:



(*2 pont*)

(b) Nem lehetséges. $18 \cdot 3 = 54$ négyzetből áll a keresett téglalap. Mivel ez nem osztható 4-gyel, ezért az egyik oldal mindenképpen páratlan lesz. (*2 pont*)

Vegyünk egy páratlan hosszú oldalt a szélén. Ennek a lefedésében biztosan lesz egy triominó, amely így áll:



(*2 pont*)

Ez alá csak úgy lehet triominót tenni, hogy keletkezzen egy 2×3-as téglalap. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny