TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

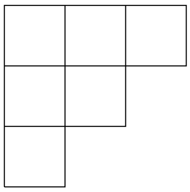
51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2022. május 27.

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Hányféleképpen lehet az alábbi alakzat mezőit az $1, 2, \ldots, 6$ számokkal kitölteni úgy, hogy minden sorban balról jobbra és minden oszlopban felülről lefele növekedjenek a számok?



Megoldás. A bal felső mezőbe csak az 1 kerülhet, hiszen a szabály miatt minden más szám nagyobb az itt szereplőnél. (***1** pont*)

Az 1 beírása után a 2 csak olyan helyre kerülhet, ahol nincs tőle balra és felfelé üres mező, tehát az első sor középső, vagy az első oszlop középső mezőjébe. (***1** pont*)

Ha az első sor középső mezőjébe írtuk a 2-est, akkor a 3-as vagy az első sor utolsó mezőjébe, vagy a középső sor első mezőjébe kerül. (***1** pont*)

Az első esetben a 4-es csak a középső sor első mezőjébe kerülhet, az 5-ös és 6-os pedig kétféleképp helyezhető el a fennmaradó mezőkben. (***1** pont*)

A második esetben a 4, 5, 6 számok tetszőlegesen írhatók a fennmaradó három mezőbe, ez 6 lehetőség. (***2** pont*)

Szimmetria miatt ugyanúgy $2 + 6 = 8$ lehetőség van akkor is, ha az első oszlop középső mezőjébe írjuk a 2-est. Összesen tehát $8 + 8 = 16$-féleképp lehet kitölteni a mezőket. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

Megoldás. Piroska leírhatott hat prímszámot, (***1** pont*)
pl. 2, 3, 5, 41, 67, 89. (***2** pont*)

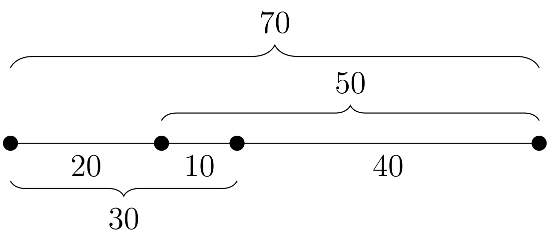
Mivel prímszám nem végződhet 4-re, 6-ra vagy 8-ra, ezért csak az 1, 2, 3, 5, 7, 9 számkártyák állhatnak az egyes helyiértéken, így Piroska legfeljebb hat prímszámot írhatott fel. (***4** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző a példában leír olyan számot, amely nem prím, minden egyes ilyen számért 1 pont levonás járjon. Ha rossz a konklúzió, de megállapítja, hogy a 4, 6, 8 nem állhat önmagában, akkor 2 pontot kapjon.

3. Lili rajzolt egy lapra négy pontot, majd egymás után lemérte a pontpárok távolságát. Az első öt lemért távolság 10, 20, 30, 40 és 50 cm volt.
Mekkora a hatodik távolság lehetséges legnagyobb értéke?

Megoldás. Mutatunk egy példát arra, hogy a hatodik távolság lehet 70 cm, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem lehet. A példában a négy pont egy egyenesre esik.



(***3** pont*)

Legyen a négy pont A, B, C és D, az ismeretlen távolság pedig AB. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség miatt $AB \leq AC + CB$, illetve $AB \leq AD + DB$. (***1** pont*)
Ebből $2AB \leq AC + CB + AD + DB \leq 140$, hiszen AC, CB, AD, DB mind lemért távolságok, amelyek közül a négy legnagyobb összege $50 + 40 + 30 + 20 = 140$. (***2** pont*)
Ezért $AB \leq 70$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4.

(a) Anna leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek összegét, valamint különbségét. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

(b) Béla leírt egy lapra két számot, majd leírta ezek szorzatát, valamint hányadosát. Így összesen négy pozitív egész szám szerepelt a lapon. Lehetséges-e, hogy ezen négy szám között egy-egy egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is van?

Megoldás.

(a) A négy szám közül az összeg a legnagyobb, ezért ennek négyjegyűnek, így legalább 1000-nek kell lennie. (***1*** *pont*)

Mivel a kisebb összeadandó legfeljebb 99, a másik 900-nál nagyobb, tehát biztosan háromjegyű. (***2*** *pont*)

Így a különbség egyrészt legfeljebb kétjegyű lehet, másrészt egy 900-nál nagyobb számból kell elvenni egy 100-nál kisebbet, ami 800-nál nagyobb. (***2*** *pont*)

Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges, hogy a négy felírt szám között szerepeljen egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is.

(b) Lehetséges. Ha az első két szám a 150 és az 50, akkor a szorzatuk 7500, a hányadosuk pedig 3. Mind a négy leírt szám pozitív egész, és valóban szerepel közöttük egyjegyű, kétjegyű, háromjegyű és négyjegyű is. (***2*** *pont*)

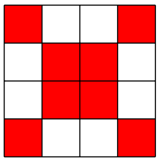
Összesen: 7 pont

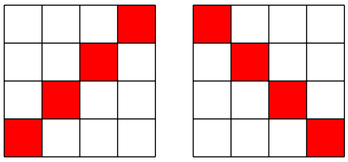
5. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?
A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

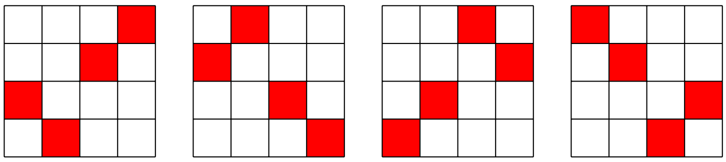
Megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy ismételt 90 fokos elforgatásokkal hány különböző jó színezés kapható belőlük. Ha egy színezésnél a táblázat minden sorában és minden oszlopában legalább egy mező piros, akkor ugyanez igaz a 90 fokos elforgatottra is. Ezért csak az határozza meg, melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a színezés milyen forgásszimmetriával rendelkezik. Három eset lehetséges: (a) a színezés megegyezik 90 fokos elforgatottjával, (b) a színezés különbözik a

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

90 fokos elforgatottjától, de azonos a 180 fokos elforgatottjával, (c) a színezés négy elforgatottja (0, 90, 180 és 270 fokkal) mind különböző. Olyan eset nem fordul elő, hogy a négy elforgatott közül pontosan három azonos és egy különböző. (*2 pont*)

(a) 

(b) 

(c) 

A (b) és (c) csoportban nyilván páros sok színezés van összesen, (*1 pont*)
ezért az a kérdés, hogy hány színezés esik az (a) csoportba. Ha egy színezés 90 fokkal elforgatva önmagába megy át, akkor az alábbi ábrán azonos betűvel jelölt mezők színe azonos kell, hogy legyen. (*1 pont*)

A	C	D	A
D	B	B	C
C	B	B	D
A	D	C	A

Ha C vagy D piros, akkor A és B bármilyen lehet. Ez $3 \cdot 4 = 12$ eset. (*1 pont*)
Ha sem C, sem D nem piros, akkor A és B is piros kell, hogy legyen, különben nem teljesülne a feltétel. Ez 1 eset. (*1 pont*)
Tehát az (a) csoportba 13 színezés esik, ami páratlan sok, ezért Alinak van igaza. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.