TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2022. május 28.

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Három testvér (Anna, Béla és Cili) kapott egy-egy egyforma tábla csokoládét. Miután megkapták, mindenki evett a csokijából: Anna 3 sort, Béla 1 sort, majd 3 oszlopot, Cili pedig 4 oszlopot evett meg. Ekkor észrevették, hogy mindegyikük csokijából ugyanannyi kocka fogyott.
Hány kockából állt a teljes tábla csokoládé?

Megoldás.

Ha az egy sorban található kockák számát s-sel, az egy oszlopban találhatókét c-vel jelöljük, akkor a *megevett* kockák egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$3s = s + 3c - 3 = 4c$$

(***3*** *pont*)

A második egyenlőségből

$$s - 3 = c$$

(***1*** *pont*)

Így

$$4c = 4s - 12 = 3s$$

(***1*** *pont*)

Amiből $s = 12$ és $c = 9$. (***1*** *pont*)

Tehát a csoki $9 \cdot 12 = 108$ kockából állt. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A *megmaradt* kockák egyenlősége alapján a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$s(c-3) = (s-3)(c-1) = (s-4)c$$

A zárójeleket felbontva

$$sc - 3s = sc - s - 3c + 3 = sc - 4c$$

Ha mindenhonnan levonunk sc-t, majd megszorozzuk az egyenletrendszert -1-gyel, az előző megoldás kezdeti egyenlerendszeréhez jutunk.

2.

(a) Van-e olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám háromszorosát kapjuk?

(b) Van-e olyan négyjegyű szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva a szám négyszeresét kapjuk?

Megoldás.

(a) Nincs ilyen háromjegyű szám.

Mivel a fordított sorrendben írt jegyek 3-mal osztható számot alkotnak, ezért a jegyek összege 3-mal osztható. De mivel ez az eredeti sorrendben is így van, ezért a keresett számnak 9-cel is oszthatónak kell lennie, mert a megfordított szám egy hárommal osztható szám háromszorosa. (***1** pont*)

Az első jegy 1, 2 vagy 3, különben a szám háromszorosa már négyjegyű lenne. (***1** pont*)
Egyik eset sem ad megoldást.

- Ha az első jegy 1, akkor az utolsó csak 7 lehet, mert annak a háromszorosa végződik 1-re. Ekkor a 9-cel való oszthatóság miatt a középső jegy csak 1 lehet, de $3 \cdot 117 = 351 \neq 711$. (***1** pont*)

- Ha az első jegy 2, akkor az utolsó jegy csak 4 lehet, így a középső jegy 3, de $3 \cdot 234 = 702 \neq 432$. (***1** pont*)

- Ha az első jegy 3, akkor az utolsó 1 lenne, de a háromszoros nem lehet kisebb az eredeti számnál, ezért itt sem kapunk megoldást. (***1** pont*)

(b) Igen, van ilyen.

Az első jegy 3-nál kisebb, különben az eredeti szám négyszerese már ötjegyű lenne. Fordított sorredben írva a jegyeket néggyel osztható számot kell kapni, ezért csak páros jegy állhat az első helyen, vagyis a keresett szám 2-vel kezdődik.

Mivel az utolsó jegy négyszeresének utolsó jegye 2, ezért az utolsó jegy 3 vagy 8 lehet. Ezek közül csak a 8 jó, mert egy 2-vel kezdődő négyjegyű szám négyszerese legalább nyolcezer.

Ha a második jegy legalább 3 lenne, akkor az eredeti szám négyszerese 9000-nél több lenne, ez nem lehetséges. Viszont a fordított sorrendben írt jegyek néggyel osztható számot adnak, ez csak akkor teljesül, ha a második jegy az 1.

Innen már végignézhető, hogy csak akkor kapunk megoldást, ha az eredeti szám harmadik jegye a 7, ekkor $2178 \cdot 4 = 8712$. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

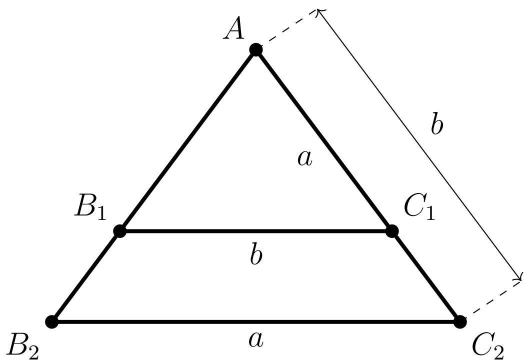
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

Megoldás. Legyenek az egyik háromszög oldalai a, a, b, míg a másiké a, b, b. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a < b$ (a feladat szövege nem tesz különbséget a két háromszög között; és tudjuk, hogy nem szabályosak a háromszögek, tehát $a \neq b$).

Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhet el a két háromszög egyenlő szöge.

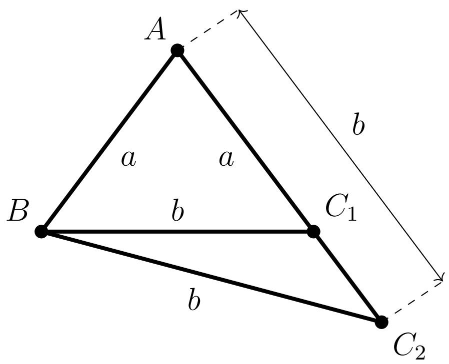
A két háromszög szárszöge nem egyezhet meg, mivel ha egymásra helyeznénk a háromszögeket úgy, hogy a szárszögük egybeessen, akkor az alábbi ábrát kapnánk:



Ha a két háromszögben a szárszögek megegyeznek, akkor az alapon fekvő szögek is. Ezért B_1C_1 és B_2C_2 párhuzamos kell, hogy legyen. Így mivel $a = AB_1 < AB_2 = b$, nyilvánvaló, hogy $B_1C_1 < B_2C_2$.
Ezzel együtt azonban $B_1C_1 = a$ és $B_2C_2 = b$, azaz $b < a$, ellentmondva a feltevésünknek.

Ha a két háromszög alapon fekvő szögei lennének egyenlők, akkor a szárszögeknek is egyenlőknek kellene lenniük. Tehát csak az lehetséges, hogy az egyik háromszög alapon fekvő szöge egyezik meg a másik háromszög szárszögével. (***1** pont*)

<u>1. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög szárszöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög alapon fekvő szögeivel. Helyezzük most is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek. Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:

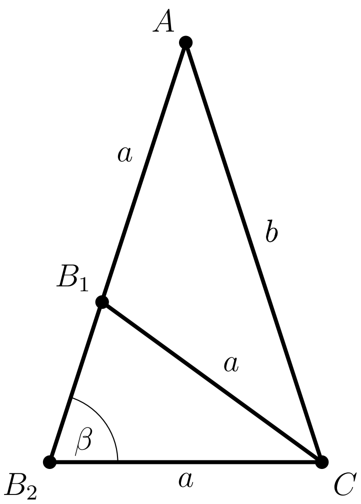


Itt $AB = AC_1 = a$, illetve $BC_1 = AC_2 = BC_2 = b$. Ekkor C_1BC_2-nek olyan egyenlőszárú háromszögnek kellene lennie, amelynek C_1-nél van az alapon fekvő szöge.
De ez lehetetlen, mivel C_1-nél tompaszögnek kell lennie ebben a háromszögben (hiszen az ABC_1 egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge hegyesszög, mivel alapon fekvő szög). (***2** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

<u>2. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög alapon fekvő szöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög szárszögével. Helyezzük ezúttal is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek.

Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



Jelölje az a, b, b oldalú AB_2C háromszög alapon fekvő szögeinek nagyságát β,
azaz legyen $AB_2C\sphericalangle = B_2CA\sphericalangle = \beta$. Ekkor $B_2AC\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta$.
Mivel $B_1C = B_2C = a$, ezért B_1B_2C háromszög is egyenlő szárú, amiből

$$CB_1B_2\sphericalangle = \beta \quad \text{és} \quad B_2CB_1\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta.$$

Innen a AB_1C háromszög (ez éppen az a, a, b oldalú egyenlő szárú háromszög) szögeit mind fel tudjuk írni β segítségével:

- Alapon felvő szögei: $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta$
- Szárszöge: $AB_1C\sphericalangle = 180^\circ - CB_1B_2\sphericalangle = 180^\circ - \beta$.

(***1** pont*)

Ezek összege 180° kell, hogy legyen, azaz:

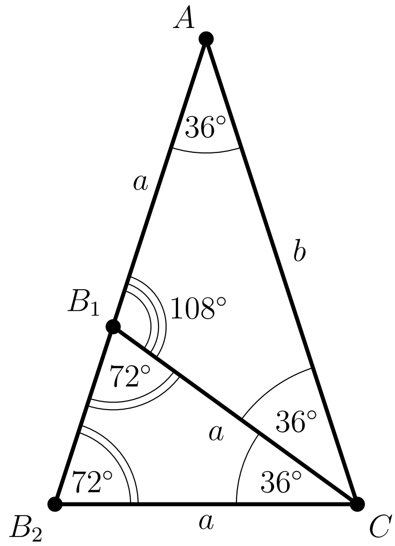
$$\begin{aligned} 180^\circ &= 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - \beta \qquad / + 5\beta - 180^\circ \\ 5\beta &= 360^\circ \\ \beta &= 72^\circ \end{aligned}$$

(***1** pont*)

Így persze $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta = 36^\circ$
és $AB_1C\sphericalangle = 180^\circ - 108^\circ$.
Tehát azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

- Az a, a, b oldalú háromszög szögei: $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.
- Az a, b, b oldalú háromszög szögei: $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. (***1** pont*)

Ezekkel a szögekkel valóban létezik az összes feltételnek eleget tevő háromszög-pár: a 2. eset viszgálatakor megadott AB_1C és AB_2C háromszögek éppen ilyenek.
(De gondolhatunk arra is, hogy egy szabályos ötszögben két átló és egy oldal az első, míg két oldal és egy átló a második típusú egyenlő szárú háromszöget határozza meg.) (***1** pont*)



Összesen: 7 pont

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Gáspár beírta egy 7×7-es táblázatba az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok oldalszomszédos mezőkön legyenek. Ezután kiszínezte azokat mezőket, amelyekben 7-tel osztva 1 vagy 2 maradékot adó szám áll. Lehetséges-e, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan két mezőt színezett ki?

Megoldás. Vegyük észre, hogy a 7-tel osztva 1 és 7-tel osztva 2 maradékot adó számok páronként egymás mellett helyezkednek el: 1–2, 8–9, ..., 43–44. Ezek a táblán 7 darab 1×2-es dominóként helyezkednek el. Vagyis a kérdés átfogalmazható arra, hogy le lehet-e tenni 7 darab dominót úgy, hogy minden sorban és oszlopban 2 mező legyen elfoglalva. (***1** pont*)

Vegyünk egy dominót, tegyük fel, hogy vízszintesen helyezkedik el. Ez a dominó két oszlopban fog elhelyezkedni, amikben még 1-1 hely maradt más dominóknak, vagyis ebben a két oszlopban csak vízszintes dominók lesznek. (***1** pont*)
Ha az 1-1 szabad helyre két különböző dominót teszünk le, akkor ezeket a dominókat nem nézve, az ettől a két oszloptól balra és jobbra lévő részre is páratlan számú dominórészt kell lerakni, ami nem lehetséges, mivel minden dominó páros részből áll. (***2** pont*)
Vagyis a két oszlopban lévő egy-egy szabad helyet egy dominó fogja lefedni. (***1** pont*)

Ez pedig minden dominóra elmondható (ugyanígy a függőlegesekre is), vagyis minden dominónak van pontosan egy párja, amivel ugyanazokat a sorokat vagy oszlopokat fedik le. (***1** pont*)
Nekünk viszont páratlan számú dominónk van, ami miatt ez nem lehetséges. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Számozzuk be a sorokat és az oszlopokat is 1-től 7-ig, majd rendeljük hozzá minden mezőhöz a sorszám és az oszlopszám összegét. Nevezzük ezt az összeget az adott mező *súly*ának. Mivel a szomszédos számokat oldalszomszédos mezőkre írtuk, bármely mező súlya pontosan eggyel tér el (felfelé vagy lefelé) az eggyel kisebb számot tartalmazó mező súlyától. (***2** pont*)
Így az $(1; 2), (8; 9), \ldots, (43; 44)$ párok mindegyikére igaz, hogy a megfelelő két mező súlyának összege páratlan. (***2** pont*)
Mivel 7 ilyen pár van, az összes színezett mező súlyának összege is páratlan. (***1** pont*)
Ha viszont minden sorban és minden oszlopban pontosan két mezőt színeztünk volna ki, akkor a színezett mezők súlyának összege

$$2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 112$$

lenne, ami páros. Ez ellentmondás, tehát nem lehetséges a feltételeknek megfelelő színezés. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.