TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2022. május 27.

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Piroska leírt a füzetébe néhány prímszámot. Észrevette, hogy mindegyik számjegyet pontosan egyszer használta, kivéve a 0-t, melyet egyszer sem. Legfeljebb hány prímszámot írhatott le Piroska?

Megoldás. Piroska leírhatott hat prímszámot, (***1** pont*)
pl. 2, 3, 5, 41, 67, 89. (***2** pont*)

Mivel prímszám nem végződhet 4-re, 6-ra vagy 8-ra, ezért csak az 1, 2, 3, 5, 7, 9 számkártyák állhatnak az egyes helyiértéken, így Piroska legfeljebb hat prímszámot írhatott fel. (***4** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző a példában leír olyan számot, amely nem prím, minden egyes ilyen számért 1 pont levonás járjon. Ha rossz a konklúzió, de megállapítja, hogy a 4, 6, 8 nem állhat önmagában, akkor 2 pontot kapjon.

2. Egy pingpongbajnokságon 5 balkezes és 8 jobbkezes játékos vett részt, és mindenki mindenkivel pontosan egy meccset játszott. Ugyanannyi meccset nyert jobbkezes játékos, mint balkezes. Hányszor fordult elő, hogy egy balkezes megvert egy jobbkezest?

Megoldás. Osszuk a mérkőzéseket három csoportba. Az első csoportba kerüljenek azok, ahol balkezes játszott balkezessel. Ilyenből $\frac{5\cdot4}{2}=10$ volt. A második csoportba tegyük azokat, ahol egy balkezes és egy jobbkezes játszott, ez $5\cdot8=40$ mérkőzés. Végül maradtak a jobbkezesek közötti mérkőzések, $\frac{8\cdot7}{2}=28$ ilyen volt. (***2** pont*)

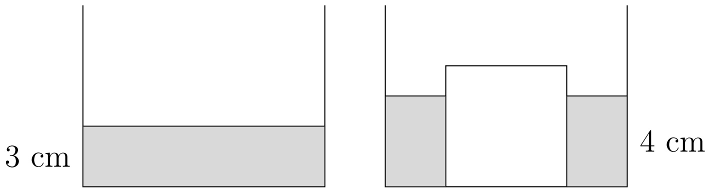
Összesen a $10+40+28=78$ mérkőzés felét, 39-et nyerte balkezes. (***2** pont*)

Mivel az első csoportban minden meccset balkezes nyert (ez 10 meccs), a harmadik csoportban pedig nincsenek balkezes győzelmek, ezért a második csoportban 29 balkezes győzelem született. (***2** pont*)

Ezek pont azok a mérkőzések, ahol egy balkezes legyőzött egy jobbkezest. Tehát 29 ilyen mérkőzés volt. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Van egy kisebb és egy nagyobb kockánk. A kisebb kockát teletöltöttük vízzel. Ezután az összes vizet áttöltöttük a nagyobb kockába (amely valamelyik lapján támaszkodva áll az asztalon), így a nagyobb kockában 3 cm magasan áll a víz. Ezután a kisebb kockát is beleraktuk a nagyobb kockába úgy, hogy annak az egyik lapja a nagyobb kocka aljához tapadjon, de a víz ne folyjon bele a kisebb kockába. Ennek hatására a nagyobb kockában 1 cm-rel megemelkedett a vízszint.
Határozzuk meg a kockák élhosszúságait.



Megoldás. Jelölje a kockák cm-ben mért élhosszát a és b $(a > b)$. A víz térfogata egyenlő a kisebbik kocka térfogatával, ez b^3. (***1** pont*)

Az áttöltés után ez a térfogat $3a^2$ alakban áll elő, mert egy a^2 alapterületű, 3 cm magas téglatestet alkot a víz. (***1** pont*)

Miután a kisebb kockát beletettük a nagyobba, ugyanez a térfogat $4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4b^2$ alakban jelenik meg. (***1** pont*)

A töltögetés során a víz térfogata nem változik, tehát $b^3 = 3a^2 = 4a^2 - 4b^2$. (***2** pont*)

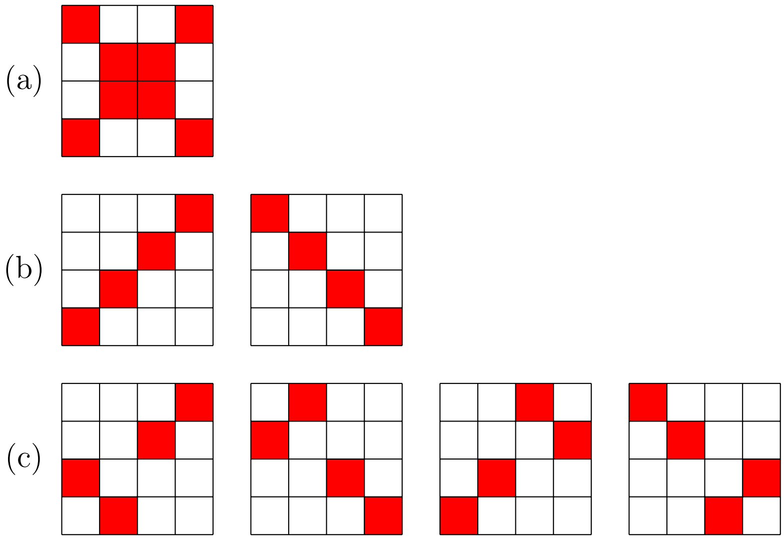
Az egyenletrendszert megoldva először $2b = a$, innen $12b^2 = b^3$, vagyis $b = 12$ adódik. Tehát a kockák élhossza $a = 24$ cm és $b = 12$ cm. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Ali és Bori egy 4×4-es táblázat néhány mezőjét szeretné kifesteni pirosra úgy, hogy minden sorban és oszlopban legalább egy piros mező legyen. Ali szerint a lehetséges színezések száma páratlan, Bori szerint páros. Melyiküknek van igaza?
A táblázatot nem lehet elforgatni vagy tükrözni.

Megoldás. Csoportosítsuk a jó színezéseket aszerint, hogy ismételt 90 fokos elforgatásokkal hány különböző jó színezés kapható belőlük. Ha egy színezésnél a táblázat minden sorában és minden oszlopában legalább egy mező piros, akkor ugyanez igaz a 90 fokos elforgatottra is. Ezért csak az határozza meg, melyik színezés melyik csoportba kerül, hogy a színezés milyen forgásszimmetriával rendelkezik. Három eset lehetséges: (a) a színezés megegyezik 90 fokos elforgatottjával, (b) a színezés különbözik a 90 fokos elforgatottjától, de azonos a 180 fokos elforgatottjával, (c) a színezés négy elforgatottja (0, 90, 180 és 270 fokkal) mind különböző. Olyan eset nem fordul elő, hogy a négy elforgatott közül pontosan

három azonos és egy különböző. (*2 pont*)



A (b) és (c) csoportban nyilván páros sok színezés van összesen, (*1 pont*)
ezért az a kérdés, hogy hány színezés esik az (a) csoportba. Ha egy színezés 90 fokkal elforgatva önmagába megy át, akkor az alábbi ábrán azonos betűvel jelölt mezők színe azonos kell, hogy legyen. (*1 pont*)

A	C	D	A
D	B	B	C
C	B	B	D
A	D	C	A

Ha C vagy D piros, akkor A és B bármilyen lehet. Ez $3 \cdot 4 = 12$ eset. (*1 pont*)
Ha sem C, sem D nem piros, akkor A és B is piros kell, hogy legyen, különben nem teljesülne a feltétel. Ez 1 eset. (*1 pont*)
Tehát az (a) csoportba 13 színezés esik, ami páratlan sok, ezért Alinak van igaza. (*1 pont*)

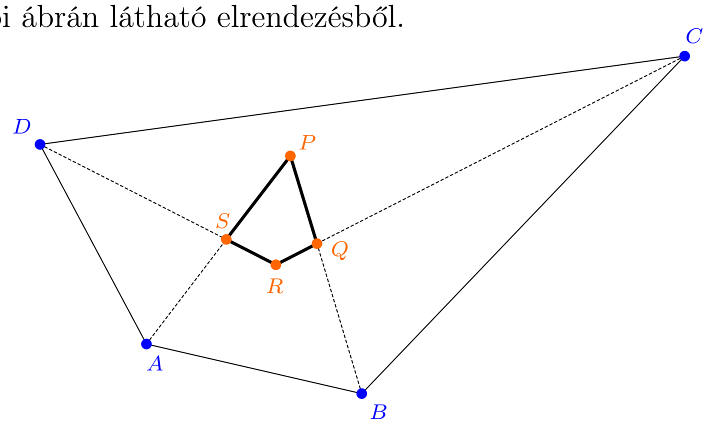
Összesen: 7 pont

5. Az $ABCD$ konvex négyszögnek megrajzoltuk mind a négy belső szögfelelezőjét.
Az A-nál levő szög belső szögfelezője a P pontban metszi a B-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A B-nél levő szög belső szögfelezője a Q pontban metszi a C-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A C-nél levő szög belső szögfelezője az R pontban metszi a D-nél levő szög belső szögfelezőjét.
A D-nél levő szög belső szögfelezője az S pontban metszi az A-nál levő szög belső szögfelezőjét.
Bizonyítsuk be, hogy ha az így keletkezett $PQRS$ négyszög rombusz, akkor négyzet is.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy ha $PQRS$ paralelogramma, akkor téglalap. Ebből következik az állítás, hiszen ha $PQRS$ rombusz, akkor paralelogramma is, ezért az előző állítás alapján téglalap; de ha egy téglalap oldalai egyenlők, akkor négyzet. (***1*** *pont*)

Induljunk ki az alábbi ábrán látható elrendezésből.



Az $ABCD$ négyszög szögeire használjuk az $A\sphericalangle = \alpha$, $B\sphericalangle = \beta$, $C\sphericalangle = \gamma$ és $D\sphericalangle = \delta$ jelöléseket, és azt a tényt, hogy $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Ha $PQRS$ paralelogramma, akkor szemközti szögei egyenlők. Felírjuk, hogy ez mit jelent az eredeti négyszög szögeivel kifejezve.

$P\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ és $R\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}$. (***1*** *pont*)

Innen következik, hogy ha $P\sphericalangle = R\sphericalangle$, akkor $\alpha + \beta = \gamma + \delta$. (***2*** *pont*)

Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét összeg pontosan 180°. Ez azt is jelenti továbbá, hogy AD és BC párhuzamos. (***1*** *pont*)

Hasonlóan a $Q\sphericalangle = S\sphericalangle$ feltételből AB és CD párhuzamossága következik. Ott tartunk tehát, hogy ha $PQRS$ paralelogramma, akkor $ABCD$ is paralelogramma. (***1*** *pont*)

A kapott $\alpha + \beta = 180°$ eredményt is felhasználva kapjuk, hogy $P\sphericalangle = 90°$, ami a $PQRS$ paralelogrammában csak úgy lehetséges, ha az egyben téglalap is. (***1*** *pont*)

A bevezetőben írtak alapján ezzel kész vagyunk, hiszen azt is tudjuk a $PQRS$ négszögről, hogy rombusz, vagyis valóban négyzet is egyben. **Összesen: 7 pont**

Megjegyzések, diszkusszió:

- A $PQRS$ körüljárása kétféle lehet $ABCD$ körüljárásához képest, de a két eset lényegében azonos. Bizonyítható, hogy minden lehetséges elrendezésben a fenti bizonyítás során felírt formulák adják a minket érdeklő szögeket.
- Ha $ABCD$ konkáv, akkor $PQRS$ hurkolt, így nem lehet rombusz.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.