TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

51. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2022. május 28.

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Melyik a nagyobb,

$$A = (1+2)^2 + (3+4)^2 + (5+6)^2 + \ldots + (2019+2020)^2 + (2021+2022)^2,$$

vagy

$$B = (2+3)^2 + (4+5)^2 + (6+7)^2 + \ldots + (2020+2021)^2 + (2022+1)^2?$$

Megoldás. Megmutatjuk, hogy az $A-B$ különbség pozitív, tehát $A > B$. Felhasználjuk, hogy

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Az A és B összegben is szerepel az összes négyzetszám 1-től 2022^2-ig, ezek a kivonásnál kiesnek, és csak a kétszeres szorzatok maradnak.

$$A - B = 2 \cdot (1\cdot 2 + 3 \cdot 4 + \ldots + 2021 \cdot 2022) - 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2022 \cdot 1)$$

(***2*** *pont*)

A különbség előjele nem változik, ha kettővel osztunk. A kivonást „elcsúsztatva” végezzük, az első összeg második tagjából a második összeg első tagját vonjuk le, az első összeg harmadik tagjából a második összeg második tagját és így tovább. Végül az első összeg első tagjából kivonjuk a második összeg utolsó tagját.

$$\frac{A-B}{2} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 5 + \ldots + 2021 \cdot 2022 - 2020 \cdot 2021 + (1 \cdot 2 - 2022 \cdot 1)$$

(***1*** *pont*)

Az utolsó pártól eltekintve mindig pozitív különbségeket kapunk:

$$\frac{A-B}{2} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + \ldots + 2 \cdot 2021 + (1 \cdot 2 - 2022 \cdot 1)$$

(***2*** *pont*)

A pozitív tagok összege éppen 1-től 2021-ig a páratlan számok összegének duplája, ebből vonunk le 2022-t.

$$\frac{A-B}{2} = 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2021) - 2022$$

(***1*** *pont*)

A zárójelben már az első és utolsó tag összege 2022, tehát $\frac{A-B}{2}$ pozitív, ezért $A > B$. (***1*** *pont*)

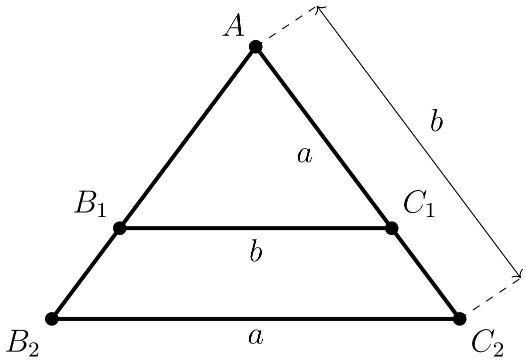
Összesen: 7 pont

2. Sára rajzolt két egyenlő szárú, de nem szabályos háromszöget úgy, hogy az első háromszög alapjának hossza megegyezik a második háromszög szárainak hosszával, valamint a második háromszög alapjának hossza megegyezik az első háromszög szárainak hosszával. Miután megrajzolta a két háromszöget, észrevette, hogy az első háromszög egyik szöge megegyezik a második háromszög egyik szögével. Mekkorák lehetnek a két háromszög szögei?

Megoldás. Legyenek az egyik háromszög oldalai a, a, b, míg a másiké a, b, b. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $a < b$ (a feladat szövege nem tesz különbséget a két háromszög között; és tudjuk, hogy nem szabályosak a háromszögek, tehát $a \neq b$).

Vizsgáljuk meg, hogyan helyezkedhet el a két háromszög egyenlő szöge.

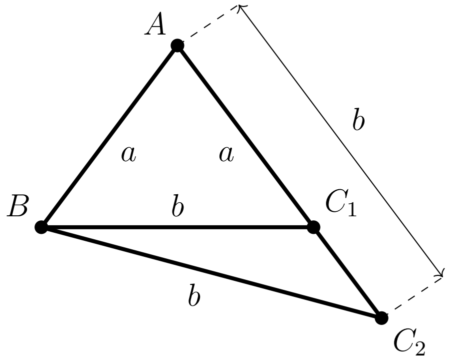
A két háromszög szárszöge nem egyezhet meg, mivel ha egymásra helyeznénk a háromszögeket úgy, hogy a szárszögük egybeessen, akkor az alábbi ábrát kapnánk:



Ha a két háromszögben a szárszögek megegyeznek, akkor az alapon fekvő szögek is. Ezért B_1C_1 és B_2C_2 párhuzamos kell, hogy legyen. Így mivel $a = AB_1 < AB_2 = b$, nyilvánvaló, hogy $B_1C_1 < B_2C_2$.
Ezzel együtt azonban $B_1C_1 = a$ és $B_2C_2 = b$, azaz $b < a$, ellentmondva a feltevésünknek.

Ha a két háromszög alapon fekvő szögei lennének egyenlők, akkor a szárszögeknek is egyenlőknek kellene lenniük. Tehát csak az lehetséges, hogy az egyik háromszög alapon fekvő szöge egyezik meg a másik háromszög szárszögével. (***1** pont*)

<u>1. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög szárszöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög alapon fekvő szögeivel. Helyezzük most is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek. Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:

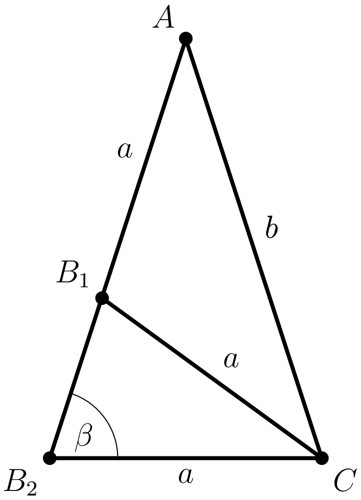


Itt $AB = AC_1 = a$, illetve $BC_1 = AC_2 = BC_2 = b$.
Ekkor C_1BC_2-nek olyan egyenlőszárú háromszögnek kellene lennie, amelynek C_1-nél van az alapon fekvő szöge.
De ez lehetetlen, mivel C_1-nél tompaszögnek kell lennie ebben a háromszögben (hiszen az ABC_1 egyenlő szárú háromszög C-nél levő szöge hegyesszög, mivel alapon fekvő szög). (***2** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

<u>2. eset:</u> Az a, a, b oldalú háromszög alapon fekvő szöge egyenlő az a, b, b oldalú háromszög szárszögével. Helyezzük ezúttal is egymásra a háromszögeket úgy, hogy az azonos méretű szögek egybeessenek.

Ekkor az alábbi szerkezetű ábrát kapjuk:



Jelölje az a, b, b oldalú AB_2C háromszög alapon fekvő szögeinek nagyságát β,
azaz legyen $AB_2C\sphericalangle = B_2CA\sphericalangle = \beta$. Ekkor $B_2AC\sphericalangle = 180° - 2\beta$.
Mivel $B_1C = B_2C = a$, ezért B_1B_2C háromszög is egyenlő szárú, amiből

$$CB_1B_2\sphericalangle = \beta \quad \text{és} \quad B_2CB_1\sphericalangle = 180° - 2\beta.$$

Innen a AB_1C háromszög (ez éppen az a, a, b oldalú egyenlő szárú háromszög) szögeit mind fel tudjuk írni β segítségével:

- Alapon felvő szögei: $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta$
- Szárszöge: $AB_1C\sphericalangle = 180° - CB_1B_2\sphericalangle = 180° - \beta$.

(***1*** *pont*)

Ezek összege 180° kell, hogy legyen, azaz:

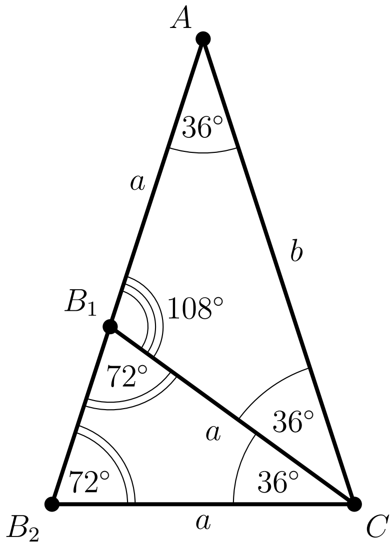
$$\begin{aligned} 180° &= 180° - 2\beta + 180° - 2\beta + 180° - \beta \qquad / + 5\beta - 180° \\ 5\beta &= 360° \\ \beta &= 72° \end{aligned}$$

(***1*** *pont*)

Így persze $B_1CA\sphericalangle = CAB_2\sphericalangle = 180° - 2\beta = 36°$
és $AB_1C\sphericalangle = 180° - 108°$.
Tehát azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás:

- Az a, a, b oldalú háromszög szögei: $36°, 36°, 108°$.
- Az a, b, b oldalú háromszög szögei: $36°, 72°, 72°$. (***1*** *pont*)

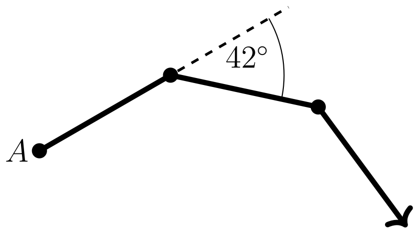
Ezekkel a szögekkel valóban létezik az összes feltételnek eleget tevő háromszög-pár: a 2. eset viszgálatakor megadott AB_1C és AB_2C háromszögek éppen ilyenek.
(De gondolhatunk arra is, hogy egy szabályos ötszögben két átló és egy oldal az első, míg két oldal és egy átló a második típusú egyenlő szárú háromszöget határozza meg.) (***1*** *pont*)



Összesen: 7 pont

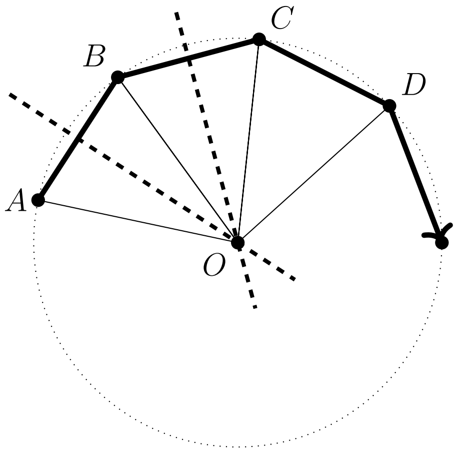
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

3. Egy csiga elindul az A pontból valamilyen irányba. Állandó nagyságú sebességgel, szakaszonként egyenesen halad, irányt csak minden egész órakor vált, ilyenkor 42 fokkal jobbra fordul.
Mennyi idő múlva ér először vissza az A pontba?
Az ábra a csiga mozgásának első 3 órájáról készült.



Megoldás. A fő észrevétel, hogy ha minden órában megjelöljük azt a pontot, ahol a csiga tartózkodik, akkor ezek a pontok egy körön vannak. (***1** pont*)

Ezt elegendő az első négy, A, B, C és D pontok esetén igazolni, utána például a B, C, D és E pontokra hasonló érvelés bizonyítja, hogy E is ugyanazon a körön van.



Legyen AB és BC szakaszfelező merőlegesének (létező) metszéspontja O. Ekkor $AO = BO = CO$, továbbá ABO és BCO egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A csiga „lépései” egyenlő hosszúak, az elfordulás szöge mindig azonos, ezért ABC és BCD is egybevágó, ahol B és C felel meg egymásnak. Innen már következik, hogy $ABCO$ és $BCDO$ egybevágó deltoidok, így $DO = CO$ is teljesül. (***2** pont*)

Gondolhatunk tehát úgy a csiga mozgására, hogy minden órában egy ugyanakkora körívet tesz meg az előbb leírt körön, mindig azonos irányban haladva. Érdemes ezért a csiga egész órákban elfoglalt pozícióját az OA-hoz viszonyított elfordulással jellemezni. Ehhez az AOB szög értékére van szükségünk.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.kalmarverseny.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Egyszerű szögszámolással $ABC\sphericalangle = 180° - 42° = 138°$. Innen $OAB\sphericalangle = ABO\sphericalangle = 69°$, végül $AOB\sphericalangle = 42°$. (***1** pont*)

(Ha valaki ismeri a kerületi és középponti szögek tételét, akkor azzal is eljuthat ide.)

Tehát minden órában 42 fokkal „fordul el” a csiga, így az a kérdés, hogy melyik a legkisebb n pozitív egész, amelyre $n \cdot 42$ a 360 többszöröse, (***2** pont*)

avagy $n \cdot 7$ a 60 többszöröse. Mivel 7 és 60 relatív prímek, ezért a legkisebb ilyen érték az $n = 60$. Tehát 60 óra kell a csigának, hogy visszaérjen A-ba. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Egy 7×7-es táblázatba beírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 49$ számokat úgy, hogy a szomszédos számok mindig oldalszomszédos mezőkön legyenek. Lehetséges-e, hogy ha 7-tel maradékosan osztjuk a beírt számokat, akkor minden sorban és minden oszlopban szerepel mind a hétféle maradék?

Megoldás. Színezzük ki a táblázatot sakktáblaszerűen. Legyen a bal alsó mező fekete. Ekkor a táblán 25 fekete és 24 fehér mező van. Mivel a számot felváltva írjuk fekete és fehér mezőkre, így az 1-es számot fekete mezőre kell írni. (***1** pont*)

Írjuk rá minden sorra és oszlopra, hogy az hányadik sor, illetve oszlop, majd minden mezőre írjuk rá a sorszámának és oszlopszámának az összegét. (***2** pont*)

Ekkor az összeg a fekete mezőkön páros, a fehér mezőkön páratlan lesz. (***1** pont*)

Nézzük meg a 7-tel osztva 1 maradékot adó számokat: 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43. Ezek közül 4 páratlan és 3 páros szám van, vagyis 4 szám lesz fekete, 3 szám lesz fehér mezőn. (***1** pont*)

Az előző megállapítás alapján az ehhez a 7 mezőhöz tartozó összegeknek az összege páratlan lesz. (***1** pont*)

Mivel minden sorból és oszlopból egy számot választottunk ki, így ennek az összegnek 56-nak kell lennie, ami ellentmondás. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.