TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2023. május 26.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább, míg végül kivont belőle 99-et, aztán hozzáadott 100-at, és így 53-at kapott. Melyik számra gondolt Panka?

Megoldás. Tekintsük az elvégzett műveleteket kettesével. Ha a gondolt számból kivonunk 1-et, majd hozzáadunk 2-t, az együtt olyan, mintha 1-et adtunk volna hozzá. (***2** pont*)

Hasonlóan, ha kivonunk 3-at, majd hozzáadunk 4-et, az is eggyel növeli a szám értékét. Innentől világos, hogy minden ilyen műveletpár ugyanígy működik, mivel a hozzáadott szám értéke eggyel nagyobb, mint a kivont számé, így a két művelet együtt eggyel növeli a számot. (***3** pont*)

$$\underbrace{-1+2}_{+1}\underbrace{-3+4}_{+1}\underbrace{-5+6}_{+1}\underbrace{-7+8}_{+1}\ldots\underbrace{-99+100}_{+1}$$

Mivel 100 műveletet végzett Panka, ez összesen 50-szer növelte eggyel az aktuális értéket, így ha a végén 53-at kapott, akkor a gondolt szám 3 kellett, hogy legyen. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

2. Öt testvér életkora: 11, 12, 13, 14 és 15 év. A 14 évesnek egy húga, egy nővére és két fiútestvére van. A 12 évesnek egy öccse, egy bátyja és két lánytestvére van.
Hány lánytestvére lehet a 13 évesnek?

Megoldás. Mivel a 14 évesnek van egy nővére, így a legidősebb testvér biztosan lány. A 12 évesnek van egy öccse, ezért a legfiatalabb biztosan fiú. (***2** pont*)

Nézzük meg, mi a helyzet, ha a 13 éves testvér lány. Ekkor a 14 évesről ismert információk miatt a 12 éves biztosan fiú (hogy meglegyen 14 éves két fiútestvére), a 12 évesről ismert információk miatt pedig a 14 évesről mondhatjuk el ugyanezt (hogy legyen a 12 évesnek bátyja). Ebben az esetben azt látjuk, hogy a 13 évesnek egy lánytestvére van csak, a 15 éves. (***2** pont*)

Nézzük, mi a helyzet, ha a 13 éves testvér fiú. Ekkor a 14 évesről ismert információk szerint a 12 éves lány (hogy legyen a 14 évesnek húga), a 12 évesről ismert információk miatt pedig a 14 évesről mondhatjuk el ugyanezt (hogy meglegyen a 12 éves két lánytestvére). Ebben az esetben tehát azt látjuk, hogy a 13 évesnek három lánytestvére van. (***2** pont*)

Tehát két különböző megoldás lehetséges: **1 vagy 3 lánytestvére lehet**. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

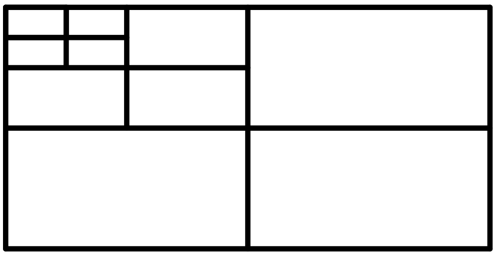
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

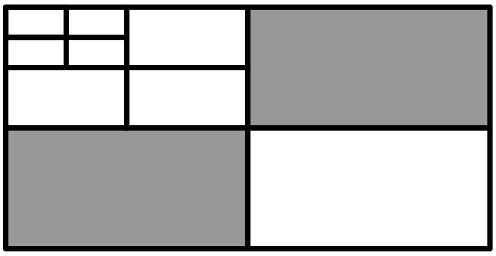
3. Egy téglalapnak összekötöttük a szemközti oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű téglalapra bontottuk. A bal felső téglalappal ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer, így összesen tíz téglalapra bontottuk fel a nagy téglalapot, az ábrán látható módon.



A tíz téglalap közül néhányat szürkére színeztünk úgy, hogy bármely két szürke téglalap legfeljebb egy pontban érintkezzen. Legfeljebb mennyi lehet a szürke téglalapok területeinek az összege, ha a bal felső téglalap 1 cm^2 területű?

Megoldás. Nézzük a három legnagyobb téglalapot! Ezek közül nem lehet mindhárom szürke, mert van köztük kettő, amelynek van közös oldala. Viszont ha legfeljebb egy szürke van közöttük, akkor a szürke téglalapok területeinek összege legfeljebb a teljes terület felét adja ki, bárhogyan is színezzük a maradék, kisebb téglalapokat. Ugyanakkor, ha két téglalapot is szürkére színezünk, azzal már a teljes terület felét megkapjuk, és ehhez jön még hozzá a kisebb téglalapokból adódó terület. Ez tehát mindenképpen nagyobb eredményt ad. (***2** pont*)

A legnagyobb területű téglalapokból csak az ábrán látható módon tudunk kettőt is szürkére színezni. (***1** pont*)



Ez már meghatározza, hogy a velük szomszédos téglalapok nem lehetnek szürkék. (***1** pont*)

A bal felső, legkisebb méretű téglalapok közül pedig ismét kettőt tudunk kiszínezni. (***1** pont*)

Ha a legkisebb téglalap területe 1 cm^2, akkor a közepes méretű téglalapé 4 cm^2, a legnagyobbé pedig 16 cm^2 (az egész téglalapé pedig 64 cm^2). (***1** pont*)

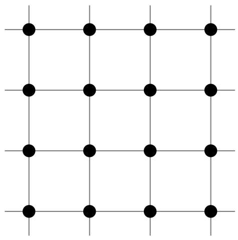
Így a területek összegének lehetséges legnagyobb értéke $1 + 1 + 16 + 16 = 34$ (cm^2). (***1** pont*)

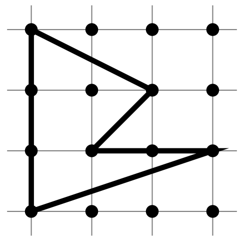
Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.





A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

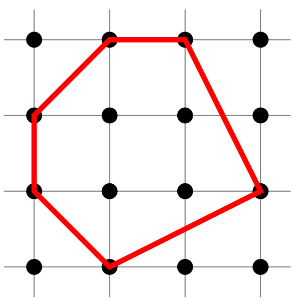
(b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

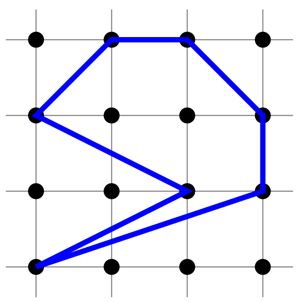
Megoldás. Mindegyik feladatrészre többféle jó rajz készíthető, egy-egy példát adunk meg:

(a) Hatszög:



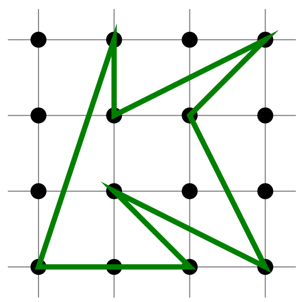
(***2*** *pont*)

(b) Hétszög:



(***2*** *pont*)

(c) Nyolcszög:



(***3*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő szorzata különböző számjegyre végződjön?

Megoldás. Négy pozitív egész számot meg lehet így adni, például $1, 2, 3, 7$ megfelelő, az ezekből képezhető kéttagú szorzatok:

$$1 \cdot 2 = 2 \qquad 1 \cdot 3 = 3 \qquad 1 \cdot 7 = 7 \qquad 2 \cdot 3 = 6 \qquad 2 \cdot 7 = 14 \qquad 3 \cdot 7 = 21$$

valóban csupa különböző számjegyre végződnek. (***2** pont*)

Öt (vagy még több) pozitív egész szám azonban már nem adható meg így. Öt számból ugyanis már $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féle szorzat képezhető, így ezek csak úgy végződhetnének csupa különböző számjegyre, ha 0-tól 9-ig minden szám pontosan egyszer jelenne meg a szorzatok utolsó számjegyei között. (***2** pont*)

Ez azt jelenti, hogy a szorzatok között pontosan két 5-tel osztható szám van. Egy szorzat csak akkor lehet 5-tel osztható, ha valamelyik tényezője 5-tel osztható. Tehát a megadott öt szám között kell, hogy legyen legalább egy 5-tel osztható.

De ha volna egy 5-tel osztható a megadott öt szám között, akkor az rögtön négy 5-tel osztható szorzatot hozna létre, ezeknek mind 0-ra vagy 5-re kellene végződnie. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

***Alternatív indoklás** arra, hogy miért nem végződhet a 10 szorzat* $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$*-re:*
Így a szorzatok között mindenképpen 5 páros és 5 páratlan kellene, hogy legyen. (***2** pont*)

De ez nem lehetséges, mivel

- Ha a megadott öt szám közül legfeljebb 1 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok mind párosak.
- Ha a megadott öt szám közül 2 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok közül csak 1 lesz páratlan.
- Ha a megadott öt szám közül 3 páratlan, akkor a kéttagú szorzatok közül csak 4 lesz páratlan.
- Ha a megadott öt szám közül legalább 4 páratlan, akkor viszont a kéttagú szorzatok közül legalább 6 páratlan lesz.

(Itt felhaszáltuk, hogy két egész szám szorzata akkor és csak akkor páratlan, ha mindkét tényező páratlan). (***3** pont*)

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ