TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2023. május 27.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

Megoldás. Az átadásra került üveg szörpök száma **csak 54 lehet**. (***1** pont*)

Ha 8 tündér vett részt a találkozón, akkor:

Mindegyik tündér $72/8 = 9$ szál virágot kapott (hiszen mindannyian ugyanannyi szálat kaptak), azaz 9 manó volt jelen.

Mindegyik tündér $48/8 = 6$ szelet csokit adott át, azaz 6 óriás volt jelen.

Így tényleg több tündér vett részt, mint óriás , míg a manók még a tündéreknél is többen voltak.

A 6 óriás a 9 manónak összesen $6 \cdot 9 = 54$ üveg szörpöt adott át. (***2** pont*)

A következőkben belátjuk, hogy más lehetőség nem lehetséges.

Ha 8-nál több, azaz legalább 9 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legfeljebb $72/9 = 8$ manó lett volna jelen – ők így kevesebben lettek volna, mint a tündérek.

Ha 7 tündér vett volna részt, akkor mivel 72 nem osztható 7-tel, a manók száma nem lenne egész (vagy: 48 nem osztható 7-tel, így az óriások száma nem egész).

Ha 7-nél kevesebb, azaz legfeljebb 6 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legalább $48/6 = 8$ óriás lett volna jelen – ők így többen lettek volna, mint a tündérek. (***4** pont*)

Összesen: 7 pont

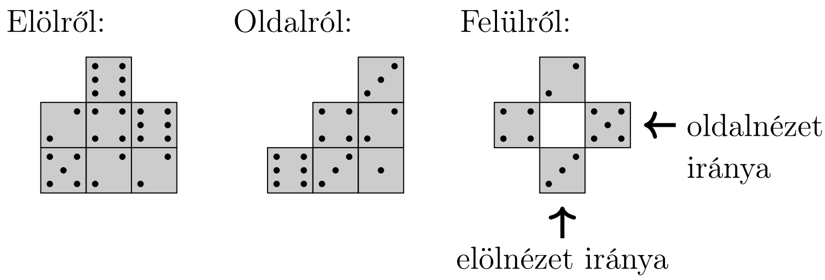
Alternatív megoldások pontozása. Más módon is belátható, hogy csak 8 tündér lehet, például: oszthatósági megfontolásokból következik, hogy a tündérek száma osztója a 24-nek (48 és 72 legnagyobb közös osztójának), így csak $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ vagy 24 lehet. Ezeket végigpróbálva kiderül, hogy csak a 8 esetén teljeül a „Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak” feltétel.

Bármilyen módszerű (rész)megoldás esetén **1** pont járjon a helyes válasz közlésére, **2** pont a 8 tündér esetének kifejtésére, **4** pont az egyéb esetek lehetetlenségének indoklására.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Szabályos dobókockák összeragasztásával tornyokat készítettünk, majd felragasztottuk ezeket az asztalra. Az elkészült építmény az ábrán látható módon néz ki elölről, oldalról, illetve felülről. Összesen hány pötty van a ragasztós oldalakon?



A felülnézeti ábrán egy-egy nyíllal jelöltük az elölnézet és az oldalnézet irányát.
A ragasztásoknál mindig teljes kockalapok érintkeznek egymással, illetve az asztallal.
Egy dobókocka akkor szabályos, ha a szemközti lapjain összesen 7 pötty van.

Megoldás. A felülnézeti kép alapján megállapítható, hogy összesen 4 tornyot készítettünk. (***1** pont*)

Azt is észrevehetjük a felülnézeti képből, hogy mind az elölnézeti, mind az oldalnézeti képen a két szélső torony nem takar ki semmit, így biztos, hogy a négy torony közül van egy, amely egy kockából áll, kettő, amely két kockából áll, a negyedik pedig három kockából áll. (***2** pont*)

Összesen tehát 8 kockát használtunk fel az építéshez. (***1** pont*)

Vegyük észre, hogy a ragasztások minden kocka esetében két egymással szemközti lapon történtek (az alsó lapjánál az asztalhoz vagy az alatta levő kockához, a felső lapján a felette levő kockához), kivéve a tornyok legfelső kockáin, ahol a felső lap nincs beragasztózva. Ha ezeket is beragasztóztuk volna, akkor a nyolc kocka esetében összesen $8 \cdot 7 = 56$ pont lenne a beragasztózott lapokon, mivel a szemközti lapokon levő pontok száma összesen mindig 7. Mivel azonban a felső lapokat nem ragasztóztuk be, $2 + 4 + 3 + 5 = 14$ ponttal kapunk ennél kevesebbet, azaz a keresett érték $56 - 14 = 42$. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Leírtam egymás mögé a számokat 1-től 2023-ig szünet vagy egyéb elválasztás nélkül, így kaptam egy hatalmas számot: 1234567891011 … 02120222023. Hányszor fordul elő ebben a számban, hogy három egymást követő számjegy 023, ebben a sorrendben?

Megoldás. Utólag tegyünk egy-egy | elválasztójelet az egymás mögé leírt számok közé:

$$1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \mid 10 \mid 11 \mid \ldots \mid 2021 \mid 2022 \mid 2023$$

Most vizsgáljuk meg, hogy ha három egymást követő számjegy 023, akkor ezekhez képest hogyan helyezkedhetnek el a | jelek. A 0 előtt közvetlenül nem lehet elválasztójel (mivel 0-val nem kezdődhet szám). A szám legvégétől eltekintve (éppen egy 023-mal zárunk, ezt majd nem szabad kifelejtenünk a megoldások megszámolásánál) legalább egy elválasztójel még következik a 0 után. Mivel legfeljebb négyjegyű számok szerepelnek a | jelek között, így a 0 utáni első elválasztójel háromféle helyen lehet:

$$\ldots 0 \mid 23 \ldots \quad \text{vagy} \quad \ldots 02 \mid 3 \ldots \quad \text{vagy} \quad \ldots 023 \mid \ldots$$ (***1** pont*)

- A $\ldots 0 \mid 23 \ldots$ esetben az elválasztójel utáni első szám utolsó jegye 1 kell legyen, így két lehetőség van:

  $$\ldots 0 \mid 231 \mid \ldots \text{ vagy } \ldots 0 \mid 23?1 \mid \ldots$$

  Az előbbi lehetőség meg is valósul, méghozzá a 230 és a 231 számok egymás mögé írásakor. Az utóbbi viszont nem fordul elő, hiszen akármilyen számjegy is áll az ? helyén, $23?1 > 2023$, így ez a szám már nem kerül leírásra. (***2** pont*)

- A $\ldots 02 \mid 3 \ldots$ esetben az elválasztójel utáni első szám utolsó két jegyének 03-nak kell lennie, így két lehetőség van:

  $$\ldots 02 \mid 303 \mid \ldots \text{ vagy } \ldots 02 \mid 3?03 \mid \ldots$$

  Az előbbi lehetőség meg is valósul, méghozzá a 302 és a 303 számok egymás mögé írásakor. Az utóbbi viszont nem fordul elő, hiszen akármilyen számjegy is áll az ? helyén, $3?03 > 2023$, így ez a szám már nem kerül leírásra. (***2** pont*)

- A $\ldots 023 \mid \ldots$ esetben az elválasztójel utáni számnak 024-re kell végződnie. Egyetlen ilyen számot írunk le, az 1024-et:

  $$\ldots 1023 \mid 1024 \mid \ldots$$

  tehát csak itt valósul meg ez a lehetőség. (***1** pont*)

A nagy szám legvégét is beleszámolva, összesen **4 alkalommal** fordul elő, hogy három egymást követő számjegy 023:

$$229 \mid 230 \mid 231 \ldots 301 \mid 302 \mid 303 \ldots 1022 \mid 1023 \mid 1024 \ldots 2022 \mid 2023$$ (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?

A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.

Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

Megoldás. A testvérek legyenek Sándor, József és Benedek, a köveket pedig jelöljük A, B, C, D, E, F-fel.

A gép kétszeri használatával el lehet osztani a köveket.

Először tegyük A-t és B-t, majd másodszor C-t és D-t a gépbe. Így négy különböző esetet kell megvizsgálni.

- Ha mindkétszer különböző égitestről származónak ítéli a gép a köveket, akkor A-t és B-t odaadhatjuk Sándornak, C-t és D-t Józsefnek, majd E-t és F-et Benedeknek. (***2** pont*)

- Ha A-t és B-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, de C-t és D-t ugyanarról a égitestről származónak, akkor A-t és B-t adjuk oda Sándornak (ez rendben van, mert ezek a kövek különböző égitestről jönnek), majd C-t Józsefnek és D-t Benedeknek (és ez is, mert ezt a két követ csak két különböző testvérnek adhatjuk). Ekkor E-t ismét Józsefnek és F-et ismét Benedeknek adva készen vagyunk. (***2** pont*)

- Ha A-t és B-t ugyanarról a égitestről, de C-t és D-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, az ugyanaz az eset, mint az előbb, csak megfordítva. (C és D legyen Sándoré, A és E Józsefé, B és F Benedeké.) (***1** pont*)

- Ha mindkétszer azonos égitestről származónak mondja a gép a betett köveket, akkor vegyük észre, hogy nem lehet mind a négy vizsgált kő ugyanarról az égitestről származó, mert csak három kövünk van egy égitestről. Így A-t és C-t adhatjuk Sándornak, B-t és D-t pedig Józsefnek. E és F pedig Benedeké lesz. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.