TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2023. május 26.

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Panka gondolt egy számra. Ezután kivont belőle 1-et, majd hozzáadott 2-t, majd kivont belőle 3-at, majd hozzáadott 4-et, és így tovább. Amikor befejezte, 39-cel kisebb számot kapott eredményül, mint amelyre eredetileg gondolt.
Melyik számot adhatta hozzá vagy vonhatta ki utoljára Panka?

Megoldás. Tekintsük az elvégzett műveleteket kettesével.

$$\underbrace{-1+2}_{+1}\underbrace{-3+4}_{+1}\underbrace{-5+6}_{+1}\underbrace{-7+8}_{+1}\ldots\underbrace{-?+?}_{+1}$$

Ha a gondolt számból kivonunk 1-et, majd hozzáadunk 2-t, az együtt olyan, mintha 1-et adtunk volna hozzá. Hasonlóan, ha kivonunk 3-at, majd hozzáadunk 4-et, az is 1-gyel növeli a szám értékét. Innentől világos, hogy minden ilyen műveletpár ugyanígy működik, mivel a hozzáadott szám értéke 1-gyel nagyobb, mint a kivont számé, így a két művelet együtt 1-gyel növeli a számot. (***2** pont*)

Így világos, hogy Panka nem fejezhette be a műveletsort egy páros szám hozzáadásával, hiszen akkor nagyobb számot kapott volna végeredményül a kezdetben gondoltnál. (***1** pont*)

Tehát Panka egy páratlan szám kivonásával fejezte be. Most párosítsuk a műveleteket máshogy. Az első levonást vegyük külön, majd utána a -2 párja legyen a $+3$, a -4 párja legyen a $+5$, stb.

$$-1\underbrace{+2-3}_{-1}\underbrace{+4-5}_{-1}\underbrace{+6-7}_{-1}\underbrace{+8-9}_{-1}\ldots\underbrace{+?-?}_{-1}$$

Ha hozzáadunk valamennyit, majd utána 1-gyel többet vonunk ki, azzal összességében 1-gyel csökkentettünk. Tehát minden ilyen műveletpár 1-gyel csökkenti az eredményt. (***2** pont*)

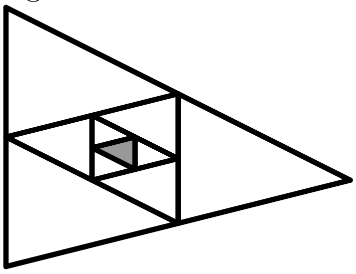
Így Pankának, miután elsőre kivont 1-et, még 38 ilyen műveletpárt kellett végrehajtania ahhoz, hogy összesen 39-cel csökkenjen a végeredmény. A 38-adik ilyen pár $+76-77$.
Tehát **Panka a 77 kivonásával fejezte be a műveletsort**. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.



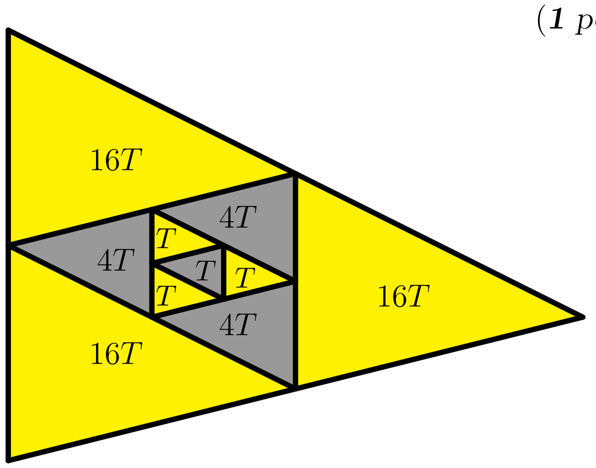
Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

Megoldás. A középső, először szürkére színezett háromszög területét jelölje T. Körülötte három ugyanekkora területű háromszög helyezkedik el, ezeket sárgára kell színeznünk. Ezek mindegyikének területe is T. (***1** pont*)

A belső négy háromszög összterülete $4T$. Körülötte három „közepes méretű”, $4T$ területű háromszög helyezkedik el, melyeket szürkére kell színeznünk. (***2** pont*)

Az eddig kiszínezett összterület: $4 \cdot 4T = 16T$. Ugyanekkora területűek a legnagyobb, kiszínezendő háromszögek is, amelyeknek sárgának kell lennie. (***2** pont*)



Így a szürke terület összesen: $T + 4T + 4T + 4T = 13T$;
míg a sárga terület összesen: $T + T + T + 16T + 16T + 16T = 51T$. (***1** pont*)

Tehát a sárga terület $\frac{51}{13}$-szor akkora, mint a szürke. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

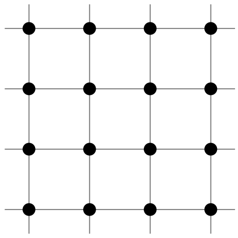
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

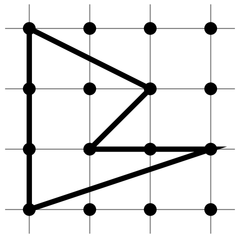
Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy matekfüzetben kijelöltünk 16 rácspontot a bal oldali ábrán látható elrendezésben.





A jobb oldali ábrán egy olyan ötszög látható, amelynek minden csúcsa a kijelölt rácspontok közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(a) Rajzolj egy olyan hatszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

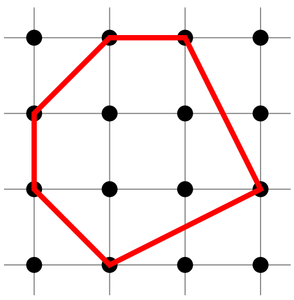
(b) Rajzolj egy olyan hétszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

(c) Rajzolj egy olyan nyolcszöget, amelynek minden csúcsa a 16 rácspont közül való, és nincsenek párhuzamos oldalai.

A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.

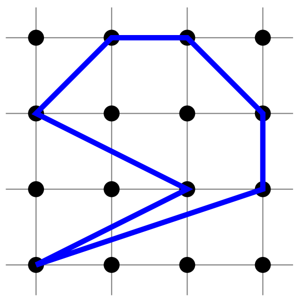
Megoldás. Mindegyik feladatrészre többféle jó rajz készíthető, egy-egy példát adunk meg:

(a) Hatszög:



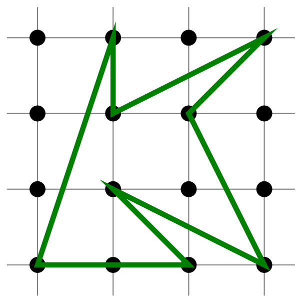
(*2* pont)

(b) Hétszög:



(*2* pont)

(c) Nyolcszög:



(*3* pont)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Csaba bácsi felírt 89 egymást követő egész számot. Csenge összeadta az első 45 számot, Csongor pedig a többit. Csodák csodájára ugyanazt a számot kapták összegként.
Mi volt a legnagyobb szám, amelyet Csaba bácsi felírt?

Megoldás. Jelöljük a Csenge által felírt legnagyobb számot a-val. Írjuk fel a Csenge és Csongor által összeadott számokat egymás alá balról jobbra emelkedő sorrendben!

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(a-88) & + & (a-87) & + & \dots & + & (a-46) & + & (a-45) & + & (a-44) \\
\big\downarrow{+45} & & \big\downarrow{+45} & & & & \big\downarrow{+45} & & \big\downarrow{+45} & & \\
(a-43) & + & (a-42) & + & \dots & + & (a-1) & + & a & &
\end{array}$$

Ahogy az ábrán látszik, a felső sor minden elemét párosíthatjuk az alsó sor minden elemével, a felső sor utolsó elemét kivéve. (***2** pont*)

Minden párban az alsó sor eleme pont 45-tel több, mint a felső soré. (***1** pont*)

Mivel a két sor összege egyenlő, ez csak úgy lehet, ha ezeket a különbségeket a kimaradó $a-44$ pontosan kompenzálja, (***3** pont*)

azaz, ha $a-44 = 45 \cdot 44 = 1980$, és így $a = 2024$. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Legfeljebb hány pozitív egész számot lehet megadni úgy, hogy bármely kettő összege különböző számjegyre végződjön?

Megoldás. Négy pozitív egész számot meg lehet így adni.
Például $1, 2, 3$ és 5 megfelelő, az ezekből képezhető kéttagú összegek:

$$1 + 2 = 3; \quad 1 + 3 = 4; \quad 2 + 3 = 5; \quad 1 + 5 = 6; \quad 2 + 5 = 7; \quad 3 + 5 = 8$$

valóban csupa különböző számjegyre végződnek. (***2** pont*)

Öt (vagy még több) pozitív egész szám azonban már nem adható meg így. Öt számból ugyanis már $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féle összeg képezhető, így ezek csak úgy végződhetnének csupa különböző számjegyre, ha 0-tól 9-ig minden szám pontosan egyszer jelenne meg az összegek között. (***1** pont*)

Így az összegek között mindenképpen 5 páros és 5 páratlan kellene, hogy legyen. (***1** pont*)

De ez nem lehetséges, mivel:

- Ha a megadott öt szám mind páros vagy mind páratlan, akkor az összes belőlük képezhető kéttagú összeg is páros.
- Ha a megadott öt szám közül 4 páros és 1 páratlan vagy 1 páros és 4 páratlan; akkor a kéttagú összegek közül 6 páros és 4 páratlan lesz.
- Ha a megadott öt szám közül 3 páros és 2 páratlan vagy 2 páros és 3 páratlan, akkor a kéttagú összegek közül 4 páros és 6 páratlan lesz.

(Itt felhaszáltuk, hogy két páros szám összege mindig páros; két páratlan szám összege is mindig páros, míg egy páros és egy páratlan szám összege mindig páratlan). (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Észrevehetjük azt is, hogy az öt adott számból képzett kéttagú összegek között mindig páros sok páratlan lesz. Ez azért teljesül, mert ha s db páros és t darab páratlan szám van az öt megadott szám között, akkor a kéttagú összegek közül $s \cdot t$ darab páratlan lesz; márpedig s és t közül az egyik mindig páros, hiszen $s + t = 5$.

Egy még körmönfontabb bizonyítás arra, hogy az öt adott számból képzett kéttagú összegek között mindig páros sok páratlan lesz: a 10 kéttagú összeg összege mindig páros, mert megegyezik az öt adott szám összegének 4-szeresével.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ