TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2023. május 27.

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. A mesebeli lények találkozóján tündérek, manók és óriások vettek részt. Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak. Minden manó adott egy szál virágot minden tündérnek. Így összesen 72 szál virág került átadásra. Minden tündér adott ajándékba egy szelet csokit minden óriásnak. Így összesen 48 szelet csoki került átadásra. Minden óriás adott ajándékba egy üveg szörpöt minden manónak. Hány üveg szörp kerülhetett átadásra összesen?

Megoldás. Az átadásra került üveg szörpök száma **csak 54 lehet**. (***1*** *pont*)

Ha 8 tündér vett részt a találkozón, akkor:

Mindegyik tündér $72/8 = 9$ szál virágot kapott (hiszen mindannyian ugyanannyi szálat kaptak), azaz 9 manó volt jelen.

Mindegyik tündér $48/8 = 6$ szelet csokit adott át, azaz 6 óriás volt jelen.

Így tényleg több tündér vett részt, mint óriás , míg a manók még a tündéreknél is többen voltak.

A 6 óriás a 9 manónak összesen $6 \cdot 9 = 54$ üveg szörpöt adott át. (***2*** *pont*)

A következőkben belátjuk, hogy más lehetőség nem lehetséges.

Ha 8-nál több, azaz legalább 9 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legfeljebb $72/9 = 8$ manó lett volna jelen – ők így kevesebben lettek volna, mint a tündérek.

Ha 7 tündér vett volna részt, akkor mivel 72 nem osztható 7-tel, a manók száma nem lenne egész (vagy: 48 nem osztható 7-tel, így az óriások száma nem egész).

Ha 7-nél kevesebb, azaz legfeljebb 6 tündér vett volna részt a találkozón, akkor legalább $48/6 = 8$ óriás lett volna jelen – ők így többen lettek volna, mint a tündérek. (***4*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Alternatív megoldások pontozása. Más módon is belátható, hogy csak 8 tündér lehet, például: oszthatósági megfontolásokból következik, hogy a tündérek száma osztója a 24-nek (48 és 72 legnagyobb közös osztójának), így csak $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ vagy 24 lehet. Ezeket végigpróbálva kiderül, hogy csak a 8 esetén teljeül a „Több tündér vett részt, mint óriás, míg a manók még a tündéreknél is többen voltak” feltétel.

Bármilyen módszerű (rész)megoldás esetén **1** pont járjon a helyes válasz közlésére, **2** pont a 8 tündér esetének kifejtésére, **4** pont az egyéb esetek lehetetlenségének indoklására.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).

Anna: „Magasabb vagyok, mint Béla.” „Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”
Béla: „Magasabb vagyok, mint Endre.” „Dénes a legmagasabb.”
Csaba: „Anna mindkét állítása igaz.” „Magasabb vagyok, mint Endre.”
Dénes: „Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” „Endre a második legmagasabb.”
Endre: „Béla mindkét állítása hamis.” „Magasabb vagyok, mint Anna.”

(a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?

(b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

Megoldás. (a) Mivel Endre azt állítja, hogy Béla mindkét állítása hamis, ezért ha Endrének ez az állítása igaz lenne, akkor már legalább két hamis állítás lenne az állítások között. Így tehát ha pontosan egy hamis állítás van, akkor ennek (Endre első állításának) kell az egyetlen hamisnak lennie. (***1** pont*)

Már csak azt kell megvizsgálnunk, a maradék kilenc állítás ellentmondásmentes-e.
Dénes azt állítja, alacsonyabb, mint Csaba, Béla viszont azt mondja, Dénes a legmagasabb.
Ez ellentmondás, így nem lehet pontosan egy állítás hamis. (***1** pont*)

(b) Az előző feladatrész végét ismét felhasználhatjuk: Dénes első állítása és Béla második állítása egyszerre nem lehet igaz. (***1** pont*)

Béla és Csaba egyszerre állítják, hogy magasabbak, mint Endre, Dénes azonban Endrét a második legmagasabbnak mondja. Ez a három állítás sem lehet igaz tehát egyszerre. (***1** pont*)

Ha tehát pontosan két hamis állítás van a tíz között, akkor ebből a két csoportból egynek-egynek kell a két hamis állításnak lennie, az összes többi állítás tehát igaz kell, hogy legyen. Endre első állítása tehát igaz: Béla mindkét állítása hamis. Ez pedig pont lefed egyet-egyet mindkét csoportból. (***2** pont*)

Megvan tehát az egyetlen lehetőség a két hamis állításra, már csak meg kell vizsgálni, lehetséges-e így kielégíteni az állításokat.

Anna a harmadik legmagasabb (Anna második állítása), Endre pedig a második legmagasabb (Dénes második állítása), és így Csaba a legmagasabb (Csaba első állítása). Az összes többi állításról ellenőrizhető, hogy megfelelnek a feltételeinknek (azaz Béla állításai hamisak, a többieké igazak). Dénes és Béla sorrendjéről nem tudunk meg semmit, mindkettő lehetőség jó megoldást ad. (***1** pont*)

Lehetséges tehát, hogy pontosan két állítás hamis. **Összesen: 7 pont**

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Joe bácsi az űrutazásról hazatérve hozott három holdkövet és három marskövet, melyeket szét szeretne osztani három fia között úgy, hogy mindenki egy holdkövet és egy marskövet kapjon. Sajnos már nem tudja, hogy melyik kő melyik égitestről származik, de szerencséjére van egy gépe, amely el tudja dönteni, hogy a gépbe berakott két kő ugyanarról az égitestről származik-e. Legalább hányszor kell használnia a gépet ahhoz, hogy biztosan szét tudja osztani jól a köveket?

A gép működése a következő: Ha a két betett kő ugyanarról az égitestről származik, akkor egy zöld lámpa villan fel. Ha különböző égitestről származnak, akkor egy piros lámpa villan fel. A gép semmilyen más információt nem ad. Nem lehet egyszerre kettőnél több követ betenni.

Keress megoldást minél kevesebb géphasználatra és mutasd meg, hogy annyi miért elegendő. Azt nem kell indokolni, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni.

Megoldás. A testvérek legyenek Sándor, József és Benedek, a köveket pedig jelöljük A, B, C, D, E, F-fel.

A gép kétszeri használatával el lehet osztani a köveket.

Először tegyük A-t és B-t, majd másodszor C-t és D-t a gépbe. Így négy különböző esetet kell megvizsgálni.

- Ha mindkétszer különböző égitestről származónak ítéli a gép a köveket, akkor A-t és B-t odaadhatjuk Sándornak, C-t és D-t Józsefnek, majd E-t és F-et Benedeknek. (***2** pont*)

- Ha A-t és B-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, de C-t és D-t ugyanarról a égitestről származónak, akkor A-t és B-t adjuk oda Sándornak (ez rendben van, mert ezek a kövek különböző égitestről jönnek), majd C-t Józsefnek és D-t Benedeknek (és ez is, mert ezt a két követ csak két különböző testvérnek adhatjuk). Ekkor E-t ismét Józsefnek és F-et ismét Benedeknek adva készen vagyunk. (***2** pont*)

- Ha A-t és B-t ugyanarról a égitestről, de C-t és D-t különböző égitestről származónak ítéli a gép, az ugyanaz az eset, mint az előbb, csak megfordítva. (C és D legyen Sándoré, A és E Józsefé, B és F Benedeké.) (***1** pont*)

- Ha mindkétszer azonos égitestről származónak mondja a gép a betett köveket, akkor vegyük észre, hogy nem lehet mind a négy vizsgált kő ugyanarról az égitestről származó, mert csak három kövünk van egy égitestről. Így A-t és C-t adhatjuk Sándornak, B-t és D-t pedig Józsefnek. E és F pedig Benedeké lesz. (***2** pont*)

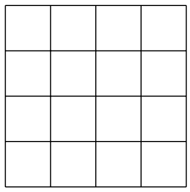
Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten 90°-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Legfeljebb hány fordulatot végezhet a legtöbb fordulatot végző diák?



Megoldás. Csoportosítsuk a táblázat mezőit elhelyezkedésük alapján az ábra szerint, így kapunk *sarokmező*ket (s), *oldalsó mező*ket (o), illetve *középső mező*ket (k).

s	o	o	s
o	k	k	o
o	k	k	o
s	o	o	s

Ha valaki o vagy s jelű mezőn áll, akkor amint egyszer kifelé néz a táblázatból, onnantól már nem fog többet fordulni, hiszen nem fog szembenézni többé senkivel. Emiatt s-en állók legfeljebb 2-szer, o-n állók legfeljebb 3-szor fordulnak. (***2** pont*)

Nézzünk most egy k jelű mezőn álló diákot, nevezzük X-nek. X két szomszédja szintén k-n áll, a másik két szomszédja pedig o-n. Ha X egyszer egy o-n álló szomszédjával szemben áll, akkor a következő tapsra fordulnak, és ezt követően ugyanaz a szomszéd soha nem fog már szemben állni X-szel (hiszen nem tud újra az előző irányba kerülni).

Emiatt X sem fog tudni újra továbbfordulni, ha megint ugyanazen szomszéd felé néz. Így, mivel az o-n álló szomszédaival legfeljebb egyszer néz szembe, addig a k-n álló szomszédaival is legfeljebb kétszer tud szemben állni. Ez azt jelenti, hogy X (és így bármelyik k jelű mezőn álló diák) legfeljebb 6 alkalommal fordulhat. (***3** pont*)

Már csak azt kell belátnunk, hogy a 6 fordulás tényleg megtörténhet egy diáknál. Az ábrán látható helyzetből indulva (a nyilak azt mutatják, hogy melyik irányba néz egy adott diák), a szürke háttérrel jelölt mezőn álló diák 6-szor fog fordulni.

←	↓	↓	→
→	↓	←	←
→	↑	←	←
←	↑	↑	→

(***3** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ