TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

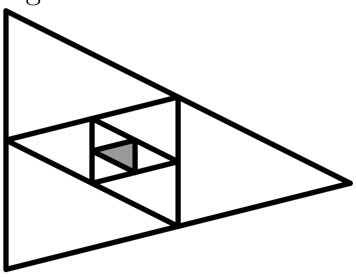
52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2023. május 26.

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy háromszögnek összekötöttük az oldalfelező pontjait, ezáltal négy egyforma területű háromszögre bontottuk. A középső háromszöggel ugyanezt az eljárást megismételtük még kétszer. A legbelső háromszöget szürkére színezve az alábbi ábrát kaptuk.



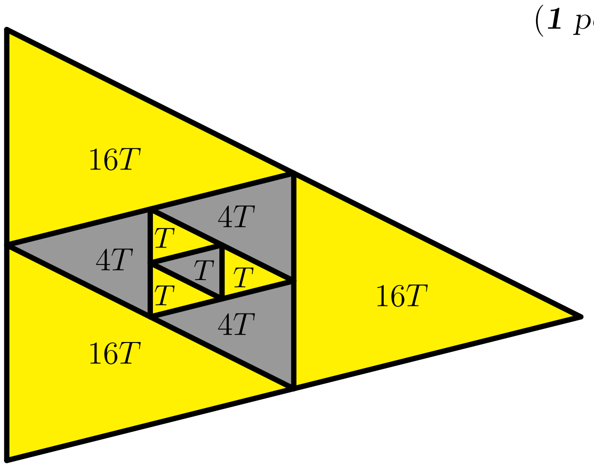
Ezután minden olyan háromszöget, melynek a belsejében nincs további szakasz berajzolva, sárgára vagy szürkére színeztünk úgy, hogy ha két háromszög több, mint egy pontban találkozik, akkor különböző színűek legyenek.

Hányszor akkora a sárga háromszögek területeinek összege, mint a szürkéké?

Megoldás. A középső, először szürkére színezett háromszög területét jelölje T. Körülötte három ugyanekkora területű háromszög helyezkedik el, ezeket sárgára kell színeznünk. Ezek mindegyikének területe is T. (***1** pont*)

A belső négy háromszög összterülete $4T$. Körülötte három „közepes méretű”, $4T$ területű háromszög helyezkedik el, melyeket szürkére kell színeznünk. (***2** pont*)

Az eddig kiszínezett összterület: $4 \cdot 4T = 16T$. Ugyanekkora területűek a legnagyobb, kiszínezendő háromszögek is, amelyeknek sárgának kell lennie. (***2** pont*)



Így a szürke terület összesen: $T + 4T + 4T + 4T = 13T$;
míg a sárga terület összesen: $T + T + T + 16T + 16T + 16T = 51T$. (***1** pont*)

Tehát a sárga terület $\frac{51}{13}$-szor akkora, mint a szürke. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Egy csapat működési szabályzata rögzíti, hogy rendkívüli esemény esetén a csapat vezetője kiket hív fel a hírrel, s azok, akik megkapták a hírt, kit kell, hogy felhívjanak az információ továbbadása végett. Ezt nevezzük riadóláncnak. A riadólánc jól működik, tehát minden csapattagot csak egyszer hívnak fel (a vezetőn kívül, akit nem hív fel senki), és a hír mindenkihez eljut. Érdekes módon a riadólánc felépítése olyan, hogy a vezetőn kívül mindenki annyi embert hív fel, ahányat az őt értesítő őutána még felhív. Hány embert kell a vezetőnek felhívnia, ha tudjuk, hogy a csapatban 100-nál többen, de 200-nál kevesebben vannak?

Megoldás. Tegyük fel, hogy minden hívás lezajlik egy perc alatt, és mindenki percenként telefonálva intézi a szükséges hívásokat. Ekkor észrevehetjük, hogy minden csapattag pontosan akkor fog végezni a hívásaival, amikor az őt felhívó személy végez, hiszen a beszélgetésük után még ugyanannyi embert hívnak fel. Ez egyben azt is jelenti, hogy mindenki egyszerre végez. (***3** pont*)

Ha egy adott pillanatban n ember tudja a hírt, akkor a következő percben ők másik n embert fognak felhívni, hiszen a felhívottak között nincs átfedés. Ez azt jelenti, hogy a párhuzamosan zajló hívások után pontosan kétszer annyian tudják a hírt. Vagyis minden hívásnál kétszereződik az információ birtokában lévő csapattagok száma. (***2** pont*)

Mivel kezdetben csak a vezető ismerte a hírt és egyedül indította a riadóláncot, így a percenkénti duplázással 7 perc alatt jut el a hír 128 emberhez. Ha ezt követően zajlana még hívás, akkor a csapattagok száma meghalaná a 200-at, ha pedig hamarabb véget ért volna, akkor nem érné el a 100-at. Tehát azt is megtudtuk, hogy a vezetővel együtt a csapatban 128 ember van, és a sikeres riadólánchoz a vezetőnek 7 embert kell felhívnia. (***2** pont*)

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

Megoldás. Mivel az első számjegy nem lehet 0, így az 9-féle különböző értéket vehetne fel. Ha azonban vizsgáljuk a szám másik négy számjegyét, kiderül, hogy a 9-cel való oszthatóság miatt ezek közül pontosan egy lesz jó. (Pontosan akkor osztható egy szám 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Jelölje az utolsó négy számjegy összegét S. Ekkor $S+1, S+2, \dots S+9$ kilenc egymást követő egész szám, tehát közülük pontosan egy osztható 9-cel.) (***3** pont*)

Tehát a 9-cel való oszthatóságot innentől nem kell figyelembe vennünk, csak azt kell összeszámolnunk, hogy hány olyan szám van, ami a feladat többi feltételét teljesíti, vagyis a százasok és tízesek helyén álló számjegye egyenlő, és az egyesek helyén álló számjegye ezeknél nagyobb. Minden egyes ilyen szám pontosan egyféleképpen egészíthető ki csattanós számmá.

Ha a százasok és tízesek helyén álló számjegy k, akkor az egyesek helyén $(9-k)$-féle számjegy szerepelhet. Az utolsó három jegyet tekintve tehát $9+8+\dots+2+1=45$-féle végződés jön szóba, ezek mindegyikénél az ezresek helyén mind a tízféle számjegy szerepelhet, tehát összesen $10\cdot 45=450$ csattanós szám van. (***4** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Egy végtelen számsorozat első tagja 2, második tagja 1. Ezután a sorozat minden tagja az előző két tag összegének reciproka. Azaz a harmadik tag $2+1=3$ reciproka, vagyis $\frac{1}{3}$; a negyedik tag $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ reciproka, vagyis $\frac{3}{4}$. Szerepel-e a sorozatban 2-nél nagyobb szám?

Megoldás. Érdemes a sorozat első néhány tagját felírnunk:

$$a_1=2, \quad a_2=1, \quad a_3=\frac{1}{3}, \quad a_4=\frac{3}{4}, \quad a_5=\frac{12}{13}$$

Vegyük észre, hogy a_4 és a_5 két egymást követő tag, amelyek mindegyike $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik. (***1** pont*)

Márpedig ha ebben a sorozatban szerepel egymás után két $\frac{1}{2}$ és 1 közötti szám, akkor onnantól kezdve a sorozat összes tagja $\frac{1}{2}$ és 1 közé fog esni. (***2** pont*)

Hiszen két 1/2 és 1 közé eső szám összege 1 és 2 közé esik, ennek reciproka pedig $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik. (***3** pont*)

Tehát a sorozat hatodik tagjától kezdve minden szám $\frac{1}{2}$ és 1 közé fog esni.

Mivel az első 5 tag egyike sem volt 2-nél nagyobb, így a sorozatban egyáltalán nem szerepelhet 2-nél nagyobb szám. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés a pontozáshoz: A teljes pontszámhoz természetesen nem szükséges pontosan kiszámítani a_3, a_4 és a_5 értékét. Elegendő azt belátni, hogy a_4 és a_5 egyaránt $\frac{1}{2}$ és 1 közé esik.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy Béla el tudja érni, hogy a kirakott szám osztható legyen 8-cal.

Ehhez elég arra figyelnie, hogy a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket hagyja meg az utolsó két kártyának. Amikor Anna lerakta az utolsó előtti számjegykártyáját, eldőlt az is, melyik lesz az utolsó páratlan számjegy. Bármi is legyen Anna utolsó kártyája, az alábbi táblázat megmutatja, Béla tudja olyan sorrendben használni a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket, hogy az utolsó három számjegy 8-cal osztható számot alkosson.

Anna utolsó kártyája	utolsó három jegy
1	$216 = 8 \cdot 27$
3	$632 = 8 \cdot 79$
5	$256 = 8 \cdot 32$
7	$672 = 8 \cdot 84$
9	$296 = 8 \cdot 37$

Ez pedig azt jelenti, hogy a teljesen 10-jegyű szám is osztható lesz 8-cal (mivel a 8-cal való oszthatóságot az utolsó három számjegy meghatározza). (***3** pont*)

Másodszor azt látjuk be, hogy Anna meg tudja akadályozni, hogy a kirakott szám osztható legyen 16-tal. Ehhez Anna tartsa meg utolsó kettőnek az $\boxed{5}$ és a $\boxed{7}$ kártyákat.

- Ha Béla nem tartja a $\boxed{2}$ kártyáját, akkor Anna a $\boxed{7}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{7x}$ lesz, ahol x nem 2, így ez nem osztható 8-cal, tehát az elé tett páratlan számjeggyel együtt sem osztható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla nem tartja a $\boxed{6}$ kártyáját, akkor Anna az $\boxed{5}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{5x}$ lesz, ahol x nem 6, így ez szintén nem lesz osztható se 8-cal, az elé tett páros számjeggyel együtt sem oszható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla utolsó két számjegye a $\boxed{2}$ és a $\boxed{6}$, akkor Anna rakja le $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ sorrendben a két kártyáját. Ekkor az utolsó 4 számjegy 5276 vagy 5672 lehet, és ezek egyike sem osztható 16-tal. (***3** pont*)

Ha tehát mindketten a lehető legokosabban játszanak, akkor egy 8-cal osztható, de 16-tal nem osztható számot kapnak a játék végén. Azaz **3-szor lehet majd elosztani a számot 2-vel** úgy, hogy még egész legyen az eredmény. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ