TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2023. május 27.

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Öt különböző magasságú ember mindegyike két-két állítást mondott, melyek némelyike igaz, némelyike hamis volt (lehetséges, hogy ugyanazon ember egyik állítása igaz, míg a másik hamis).

Anna: „Magasabb vagyok, mint Béla.” „Két magasabb és két alacsonyabb ember van nálam.”
Béla: „Magasabb vagyok, mint Endre.” „Dénes a legmagasabb.”
Csaba: „Anna mindkét állítása igaz.” „Magasabb vagyok, mint Endre.”
Dénes: „Alacsonyabb vagyok, mint Csaba.” „Endre a második legmagasabb.”
Endre: „Béla mindkét állítása hamis.” „Magasabb vagyok, mint Anna.”

(a) Lehetséges-e, hogy pontosan 1 állítás hamis a 10 állítás közül?

(b) Lehetséges-e, hogy pontosan 2 állítás hamis a 10 állítás közül?

Megoldás. (a) Mivel Endre azt állítja, hogy Béla mindkét állítása hamis, ezért ha Endrének ez az állítása igaz lenne, akkor már legalább két hamis állítás lenne az állítások között. Így tehát ha pontosan egy hamis állítás van, akkor ennek (Endre első állításának) kell az egyetlen hamisnak lennie. (***1** pont*)

Már csak azt kell megvizsgálnunk, a maradék kilenc állítás ellentmondásmentes-e.
Dénes azt állítja, alacsonyabb, mint Csaba, Béla viszont azt mondja, Dénes a legmagasabb.
Ez ellentmondás, így nem lehet pontosan egy állítás hamis. (***1** pont*)

(b) Az előző feladatrész végét ismét felhasználhatjuk: Dénes első állítása és Béla második állítása egyszerre nem lehet igaz. (***1** pont*)

Béla és Csaba egyszerre állítják, hogy magasabbak, mint Endre, Dénes azonban Endrét a második legmagasabbnak mondja. Ez a három állítás sem lehet igaz tehát egyszerre. (***1** pont*)

Ha tehát pontosan két hamis állítás van a tíz között, akkor ebből a két csoportból egynek-egynek kell a két hamis állításnak lennie, az összes többi állítás tehát igaz kell, hogy legyen. Endre első állítása tehát igaz: Béla mindkét állítása hamis. Ez pedig pont lefed egyet-egyet mindkét csoportból. (***2** pont*)

Megvan tehát az egyetlen lehetőség a két hamis állításra, már csak meg kell vizsgálni, lehetséges-e így kielégíteni az állításokat.
Anna a harmadik legmagasabb (Anna második állítása), Endre pedig a második legmagasabb (Dénes második állítása), és így Csaba a legmagasabb (Csaba első állítása). Az összes többi állításról ellenőrizhető, hogy megfelelnek a feltételeinknek (azaz Béla állításai hamisak, a többieké igazak). Dénes és Béla sorrendjéről nem tudunk meg semmit, mindkettő lehetőség jó megoldást ad. (***1** pont*)

Lehetséges tehát, hogy pontosan két állítás hamis. **Összesen: 7 pont**

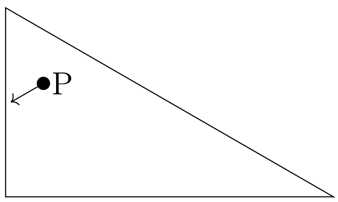
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

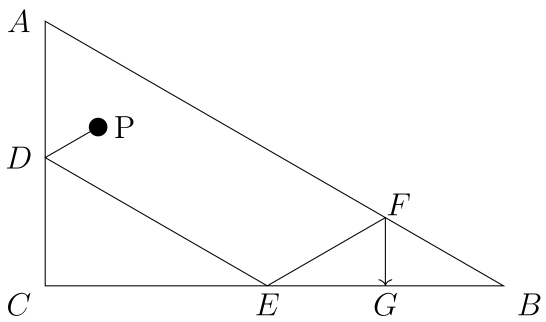
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: `www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

2. Egy derékszögű háromszög alakú, lyukak nélküli biliárdasztal egyik csúcsánál az oldalak 30°-os szöget zárnak be egymással. Egy biliárdgolyót elindítunk az ábrán jelölt módon, a P pontból úgy, hogy az először az asztal legrövidebb oldalát éri el annak egy belső pontjában. A golyó haladási iránya 60°-os szöget zár be a legrövidebb oldallal.



A golyó útját vizsgálva azt látjuk, hogy minden egyes alkalommal, amikor találkozik a fallal, tökéletesen pattanva halad tovább, vagyis a falhoz érkező, valamint a faltól elinduló haladási iránya ugyanakkora szöget zár be a fallal. Hány pattanás után lesz a golyó újra a P pontban?

Megoldás. Tekintsük az alábbi ábrán a golyó útja során az első három pattanást.



(*Jó ábra:* ***2*** *pont*)

A szöveg szerint felírható, hogy $EDC\sphericalangle = PDA\sphericalangle = 60°$, tehát DE szakasz párhuzamos AB-vel. Emiatt a golyó az első pattanás után biztos, hogy a háromszög hosszabb befogójának belső pontján pattan meg. Innen az iránya miatt csak az átfogóhoz érhet, s a szögek alapján látni fogjuk, hogy a következő pattanás helye megint a BC oldal belsejébe esik. (***1*** *pont*)

CDE háromszögben már meghatározható, hogy $DEC\sphericalangle = 30°$, s a pattanás miatt $DEC\sphericalangle = FEG\sphericalangle$, tehát ez utóbbi is 30°-os. Emiatt $DEF\sphericalangle = 120°$, vagyis $EFA\sphericalangle = 60°$. A pattanás miatt ez megegyezik $BFG\sphericalangle$-gel. Mivel a B-nél levő szög 30°-os, ezért $FGB\sphericalangle = 90°$. (***2*** *pont*)

Tehát a golyó innentől kezdve ugyanezt az útvonalat járja be visszafelé, (***1*** *pont*)

vagyis rendre a D, E, F, G, F, E, D pontokon át, **7 pattanás után lesz újra a P pontban.** (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Van 1000 kártya, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva, és 100 doboz, melyek 00-tól 99-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából egy számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 627-es számú kártya a 27-es, a 67-es vagy a 62-es számú dobozok valamelyikébe tehető).
Dobozokba lehet-e tenni az összes kártyát úgy, hogy 50 doboz üresen maradjon?

Megoldás. Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges. A kártyákat úgy fogjuk elhelyezni, hogy csak olyan dobozt használjunk, melynek a sorszámában vagy mindkét számjegy páros, vagy mindkettő páratlan. (***2** pont*)

Mivel 5-féle páros számjegy van, így olyan doboz, melynek sorszámában mindkét számjegy páros, $5 \cdot 5 = 25$ található. Ugyanígy az 5 páratlan számjegy felhasználásával 25 olyan dobozt kapunk, melynek mindkét számjegye páratlan. Ez összesen legfeljebb 50 doboz felhasználását jelenti, tehát legalább 50 doboz üresen marad. (***2** pont*)

Minden kártyán három számjegy található. Vizsgáljuk meg, hogy ezek között hány páros számjegy lehet! Ha 2 vagy 3, akkor tudunk úgy egy számjegyet elhagyni, hogy két páros számjegy maradjon, így a kártya elhelyezhető megfelelően egy dobozba az előbbiek közül. Amennyiben pedig csak 1 vagy 0 páros számjegyet találunk, úgy páratlan számjegyből lesz 2 vagy 3, így azt tudjuk elérni, hogy egy számjegy elhagyásával két páratlan számjegyből álljon a szám, ennek megfelelően kerül jó dobozba. (***3** pont*)

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk, tehát valóban elhelyezhetőek a kártyák a feladat feltételei szerint.

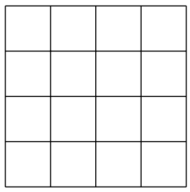
Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. A tornatanár egy 4×4-es rácsot rajzolt az iskolaudvarra. A rács mind a 16 mezőjére felállt egy-egy diák, úgy, hogy valamelyik rácsvonallal párhuzamos irányba néz. A tornatanár néha tapsol egyet. Ha két élszomszédos mezőn álló diák éppen egymás felé néz, akkor a tapsra mindketten 90°-os fordulatot végeznek jobbra. Ezen kívül semmilyen más mozgást nem végeznek. Lehetséges-e, hogy a 30. tapsnál még fordul valaki?



Megoldás. Csoportosítsuk a táblázat mezőit elhelyezkedésük alapján az ábra szerint, így kapunk *sarokmezőket* (s), *oldalsó mezőket* (o), illetve *középső mezőket* (k).

s	o	o	s
o	k	k	o
o	k	k	o
s	o	o	s

Ha valaki o vagy s jelű mezőn áll, akkor amint egyszer kifelé néz a táblázatból, onnantól már nem fog többet fordulni, hiszen nem fog szembenézni többé senkivel. Emiatt s-en állók legfeljebb 2-szer, o-n állók legfeljebb 3-szor fordulnak. (***2** pont*)

Nézzünk most egy k jelű mezőn álló diákot, nevezzük X-nek. X két szomszédja szintén k-n áll, a másik két szomszédja pedig o-n. Ha X egyszer egy o-n álló szomszédjával szemben áll, akkor a következő tapsra fordulnak, és ezt követően ugyanaz a szomszéd soha nem fog már szemben állni X-szel (hiszen nem tud újra az előző irányba kerülni).

Emiatt X sem fog tudni újra továbbfordulni, ha megint ugyanazen szomszéd felé néz. Így, mivel az o-n álló szomszédaival legfeljebb egyszer néz szembe, addig a k-n álló szomszédaival is legfeljebb kétszer tud szemben állni. Ez azt jelenti, hogy X (és így bármelyik k jelű mezőn álló diák) legfeljebb 6 alkalommal fordulhat. (***3** pont*)

Számoljuk meg, hogy összesen hány fordulás történhet legfeljebb. A négy s-en álló legfeljebb 2-szer, a nyolc o-n álló legfeljebb 3-szor, a négy k-n álló diák pedig legfeljebb 6-szor fordulhat. Tehát a fordulások száma nem lehet több, mint $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 56$.

Mivel egy tapsnál legalább ketten fordulnak egyszerre, ez azt jelenti, hogy a játék során legfeljebb $56/2 = 28$ tapsnál fordulhattak, vagyis a 30. tapsnál már biztosan nem fordult senki. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ