TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2023. május 26.

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy termék árát növelték p %-kal, majd csökkentették p %-kal, így a végső ára az eredeti árhoz képest 9 %-kal kisebb lett. Határozzuk meg p értékét.

Megoldás. Ha a termék ára eredetileg x volt, akkor a növelés után $(1+\frac{p}{100})\cdot x$ lett az ára, amelyet ha csökkentünk p %-kal, akkor $\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot x\right)$-re változik. A feladat állítása szerint ez megegyezik 0,91x értékével. Tehát

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=0{,}91 \qquad (\textit{3 pont})$$

vagyis

$$1-\left(\frac{p}{100}\right)^2=0{,}91 \qquad (\textit{2 pont})$$

Ebből, mivel p pozitív, $\frac{p}{100}=0{,}3$ adódik, (*1 pont*)

vagyis $p=30$. A kezdeti növelés 30 %-os volt. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

2. Egy ötjegyű számot *csattanós*nak hívunk, ha a százasok és a tízesek helyén azonos számjegy áll, és ennél nagyobb számjegy áll az egyesek helyén. Hány 9-cel osztható csattanós szám van?

Megoldás. Mivel az első számjegy nem lehet 0, így az 9-féle különböző értéket vehetne fel. Ha azonban vizsgáljuk a szám másik négy számjegyét, kiderül, hogy a 9-cel való oszthatóság miatt ezek közül pontosan egy lesz jó. (Pontosan akkor osztható egy szám 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel. Jelölje az utolsó négy számjegy összegét S. Ekkor $S+1, S+2, \dots S+9$ kilenc egymást követő egész szám, tehát közülük pontosan egy osztható 9-cel.) (*3 pont*)

Tehát a 9-cel való oszthatóságot innentől nem kell figyelembe vennünk, csak azt kell összeszámolnunk, hogy hány olyan szám van, ami a feladat többi feltételét teljesíti, vagyis a százasok és tízesek helyén álló számjegye egyenlő, és az egyesek helyén álló számjegye ezeknél nagyobb. Minden egyes ilyen szám pontosan egyféleképpen egészíthető ki csattanós számmá.

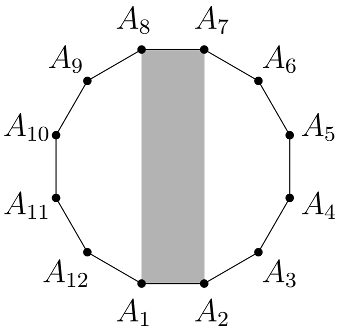
Ha a százasok és tízesek helyén álló számjegy k, akkor az egyesek helyén $(9-k)$-féle számjegy szerepelhet. Az utolsó három jegyet tekintve tehát $9+8+\dots+2+1=45$-féle végződés jön szóba, ezek mindegyikénél az ezresek helyén mind a tízféle számjegy szerepelhet, tehát összesen $10\cdot 45=450$ csattanós szám van. (*4 pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

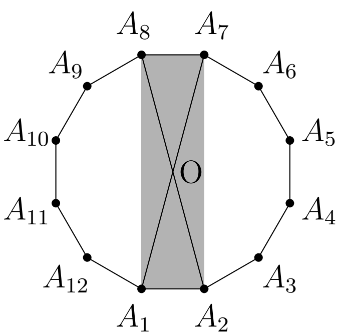
3. Legyen $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ egy szabályos 12-szög. Hányszorosa a 12-szög területe az $A_1A_2A_7A_8$ téglalap területének?

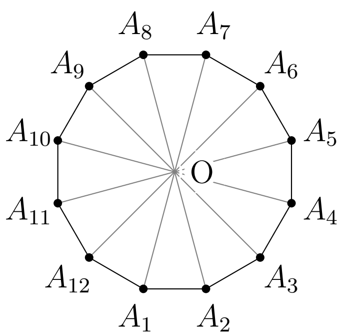


Megoldás. Húzzuk be a téglalap két átlóját, ezek a kör O középpontjában metszik egymást, és négy egyenlő területű részre osztják a téglalapot. (***2** pont*)

Utóbbi állítást például így bizonyíthatjuk: a téglalapot egyik átlója behúzásával két egybevágó, így egyenlő területű háromszögre osztjuk. Ha ezután a másik átlót is, a behúzott szakaszok mindkét háromszögben súlyvonalak, így mindkét háromszöget területét felezni fogják.
Megjegyzés a pontozáshoz: *Mivel az egy közismert tétel, hogy minden paralelogrammát négy egyenlő területű részre osztanak az átlói, ezért a bizonyítás hiánya nem jelent pontlevonást.*

Emiatt a téglalap területe négyszerese az A_1A_2O háromszög területének. (***1** pont*)





Mivel a 12-szög szabályos, így bármely két szomszédos csúcsát O-val összekötve egymással egybevágó háromszögeket kapunk. (***2** pont*)

Látható tehát, hogy a sokszög területe 12-szerese egy ilyen háromszög területének. (***1** pont*)

Vagyis a sokszög területe a téglalap területének háromszorosa. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Anna és Béla kezében is öt-öt számjegykártya van, Annánál az $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, $\boxed{9}$, Bélánál pedig a $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{8}$. Felváltva balról jobbra rakják le a számjegykártyákat, így egy tízjegyű számot képezve. Anna kezd. Mi a legnagyobb kettőhatvány, amelyről Béla garantálni tudja (Anna bármilyen stratégiája esetén), hogy osztani fogja a kapott tízjegyű számot?

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy Béla el tudja érni, hogy a kirakott szám osztható legyen 8-cal.

Ehhez elég arra figyelnie, hogy a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket hagyja meg az utolsó két kártyának. Amikor Anna lerakta az utolsó előtti számjegykártyáját, eldőlt az is, melyik lesz az utolsó páratlan számjegy. Bármi is legyen Anna utolsó kártyája, az alábbi táblázat megmutatja, Béla tudja olyan sorrendben használni a $\boxed{2}$ és $\boxed{6}$ számjegyeket, hogy az utolsó három számjegy 8-cal osztható számot alkosson.

Anna utolsó kártyája	utolsó három jegy
1	$216 = 8 \cdot 27$
3	$632 = 8 \cdot 79$
5	$256 = 8 \cdot 32$
7	$672 = 8 \cdot 84$
9	$296 = 8 \cdot 37$

Ez pedig azt jelenti, hogy a teljesen 10-jegyű szám is osztható lesz 8-cal (mivel a 8-cal való oszthatóságot az utolsó három számjegy meghatározza). (***3** pont*)

Másodszor azt látjuk be, hogy Anna meg tudja akadályozni, hogy a kirakott szám osztható legyen 16-tal. Ehhez Anna tartsa meg utolsó kettőnek az $\boxed{5}$ és a $\boxed{7}$ kártyákat.

- Ha Béla nem tartja a $\boxed{2}$ kártyáját, akkor Anna a $\boxed{7}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{7x}$ lesz, ahol x nem 2, így ez nem osztható 8-cal, tehát az elé tett páratlan számjeggyel együtt sem osztható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla nem tartja a $\boxed{6}$ kártyáját, akkor Anna az $\boxed{5}$ kártyáját rakja le utoljára, így az utolsó két számjegy $\overline{5x}$ lesz, ahol x nem 6, így ez szintén nem lesz osztható se 8-cal, az elé tett páros számjeggyel együtt sem oszható nyolccal, és így a szám nem osztható sem 8-cal, sem 16-tal.
- Ha Béla utolsó két számjegye a $\boxed{2}$ és a $\boxed{6}$, akkor Anna rakja le $\boxed{5}$, $\boxed{7}$ sorrendben a két kártyáját. Ekkor az utolsó 4 számjegy 5276 vagy 5672 lehet, és ezek egyike sem osztható 16-tal. (***3** pont*)

Ha tehát mindketten a lehető legokosabban játszanak, akkor egy 8-cal osztható, de 16-tal nem osztható számot kapnak a játék végén. Azaz **3-szor lehet majd elosztani a számot 2-vel** úgy, hogy még egész legyen az eredmény. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. A bergengóc vásáron kétféle fizetőeszköz létezik: arany és ezüst. Tudjuk, hogy 1 kecske és 5 birka 4 aranyba és 8 ezüstbe, 7 kecske és 2 birka 11 aranyba és 8 ezüstbe, 3 kecske és 4 birka 7 aranyba és 6 ezüstbe kerül. Szeretnénk 2 kecskét és 3 birkát venni. Hány ezüstöt kell még adnunk, ha már 2 aranyat adtunk az eladónak?

Megoldás. Próbáljunk keresni olyan állatmennyiséget, amit kétféleképpen is elő lehet állítani az ismert mennyiségekből. Látható, hogy a 9 kecske és 12 birka megkapható egyrészt úgy, hogy kétszer veszünk 1 kecskét és 5 birkát, egyszer pedig 7 kecskét és 2 birkát, másrészt pedig ha háromszor veszünk 3 kecskét és 4 birkát. (***2** pont*)

Az első esetben 19 aranyat és 24 ezüstöt fizetünk, a másodikban 21 aranyat és 18 ezüstöt. (***1** pont*)

Ez alapján megállapítható, hogy 2 arany ugyanannyit ér, mint 6 ezüst, vagyis 1 arany az 3 ezüstöt ér. (***1** pont*)

Az aranyokat ezüsttel helyettesítve azt kapjuk, hogy 3 kecske 4 birka 27 ezüstbe, 1 kecske és 5 birka 20 ezüstbe kerül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy 3 kecske és 15 birka 60 ezüstbe kerül, vagyis a 11-gyel több birka 33-mal több ezüstbe kerül, azaz 1 birka 3 ezüstbe kerül. Ebből pedig kiszámolható, hogy 1 kecske 5 ezüstbe kerül. (***2** pont*)

A feladat kérdése, a 2 kecske és 3 birka összesen 19 ezüstbe kerülne, amiből mi már 2 aranyat kaptunk így még $19 - 2 \cdot 3 = 13$ ezüstöt kell még adnunk. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.