TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2023. május 27.

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Anna, Bea, Cili és Dóra leült egy körbe. Anna felírta két kedvenc számát (különböző pozitív egészek) egy lapra, majd továbbadta jobbra. Amikor valaki megkapta a lapot, kiradírozta a rajta lévő két számot, és helyükre felírta a kiradírozott két szám összegét és különbségét, majd továbbadta a lapot jobbra. Mikor a lap visszaért Annához, azt látta, hogy a lapon szereplő két szám közül az egyik megegyezik az általa felírt kisebb számmal, míg a másik szám az általa felírt nagyobb számnál 42-vel nagyobb. Mi Anna két kedvenc száma?
Két szám különbségét úgy számítjuk, hogy a nagyobbikból vonjuk ki a kisebbiket.

Megoldás. Jelölje az Anna által felírt két pozitív egészt x és y úgy, hogy $x > y$.
Foglaljuk táblázatba, hogy ki melyik számokat írta fel a lapra:

Anna	x	y
Bea	$x+y$	$x-y$
Cili	$2x$	$2y$
Dóra	$2x+2y$	$2x-2y$

(A táblázatban azért egyértelmű minden szám, mivel a bal oldalt szereplő számoknak muszáj nagyobbnak lenniük a jobb oldaliaknál, következésképp egyértelmű a különbség képzése is.) (*2 pont*)

A feladat szövege alapján a következő egyenleteket írhatjuk föl:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= y \\ 2x + 2y &= x + 42 \end{aligned}$$

(Azért biztos, hogy $2x - 2y$ egyezik meg y-nal, mert $x > y$ és $2x + 2y > 2x - 2y$). (*2 pont*)

Az egyenletrendszer megoldásaként $x = 18$, $y = 12$ adódik. (*2 pont*)

Így az egyes lányok által felírt számok:

Anna	18	12
Bea	30	6
Cili	36	24
Dóra	60	12

valóban teljesítik a feladat feltételeit.

Tehát **Anna kedvenc számai 18 és 12**. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek az összes osztója közül a negyedik legnagyobb a 42? *Például a 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6 és 12, így a negyedik legnagyobb osztója a 3.*

Megoldás. Legyen N egy olyan szám, amelynek a negyedik legnagyobb osztója 42. Ekkor N osztható 42-vel, így 2-vel, 3-mal és 6-tal is, ezért N három legnagyobb osztója biztosan N, $\frac{N}{2}$ és $\frac{N}{3}$. (***2*** *pont*)

Mivel az $\frac{N}{6}$ biztosan szerepel az osztók között, a negyedik legnagyobb osztó csak az $\frac{N}{4}$, az $\frac{N}{5}$ vagy az $\frac{N}{6}$ lehet. (***2*** *pont*)

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{4}$, akkor $N = 42{\cdot}4 = 168$. Ennek valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója. (***1*** *pont*)

Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{5}$, akkor $N = 42 \cdot 5 = 210$, ennek is valóban 42 a negyedik legnagyobb osztója. (***1*** *pont*)

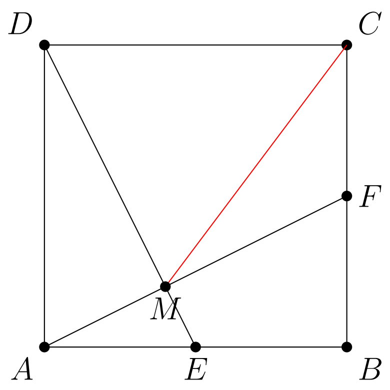
Ha a negyedik legnagyobb osztó $\frac{N}{6}$, akkor viszont $N = 6 \cdot 42 = 252$, ez viszont osztható 4-gyel is, és így a 42 csak az ötödik legnagyobb osztója (az $N = 252$, az $\frac{N}{2} = 126$, az $\frac{N}{3} = 84$ és az $\frac{N}{4} = 63$ után). (***1*** *pont*)

Tehát **2 olyan szám van**, ami a feladat feltételeinek megfelel, a 168, illetve a 210.

Összesen: 7 pont

3. Az $ABCD$ egységnyi oldalhosszúságú négyzetben az AB oldal felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja F. Az AF és DE egyenesek metszéspontja M. Milyen hosszú a CM szakasz?

Megoldás. Készítsünk ábrát a feladathoz.



Vegyük észre, hogy $AF \perp DE$. (***1*** *pont*)

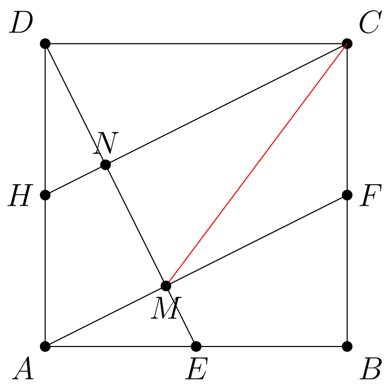
Ez azért teljesül,
mert AED és ABF derékszögű háromszögek egybevágók (hiszen egyik befogójuk 1, a másik befogójuk pedig $\frac{1}{2}$),
és egymáshoz képest derékszöggel vannak elforgatva. (***1*** *pont*)

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

Bizonyítás középvonallal és tükrözéssel

Legyen DA oldal felezőpontja H, és húzzuk be a CH szakaszt. Jelölje DE és HC metszéspontját N. (*1* pont)



Ekkor $CH \parallel AF$ (például azért, mert $AFCH$ egy paralelogramma, hiszen HA és CF párhuzamos és egyenlő hosszú), és így persze $DM \perp HC$. (*1* pont)

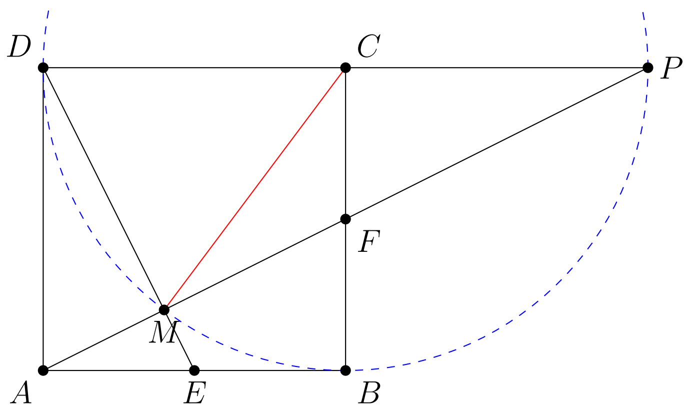
Vegyük észre, hogy az AMD háromszögben HN éppen középvonal, hiszen párhuzamos AM-mel és átmegy AD felezőpontján. Következésképpen N a DM felezőpontja. (*2* pont)

Tehát HC merőlegesen felezi DM szakaszt, azaz D-t tükrözve HC tengelyre éppen M pontot kapjuk. Így a DC szakaszt tükrözve HC tengelyre MC szakaszt kapjuk, azaz $MC = CD = 1$. (*1* pont)

Összesen: 7 pont

Bizonyítás a Thalész-tétel megfordításával

Jelölje az AF és a CD egyenesek metszéspontját P. (*1* pont)



ABF és PCF derékszögű háromszögek egybevágók, mivel szögeik megegyeznek ($FBA\sphericalangle$ és $FCP\sphericalangle$ derékszögek; $AFB\sphericalangle$ és $PFC\sphericalangle$ csúcsszögek; $BAF\sphericalangle$ és $CPF\sphericalangle$ váltószögek) és $BF = FC = \frac{1}{2}$.
Így $PC = CD = 1$, azaz DP felezőpontja C. (*1* pont)

DMP háromszög derékszögű. A Thalész-tétel megfordítása miatt a PD átfogó Thalész-köre (amelynek középpontja a fentiek szerint C) átmegy az M ponton. (*2* pont)

Tehát $CM = CD = CP = 1$. (*1* pont)

Összesen: 7 pont

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Van 100 000 kártyánk, melyek 00000-tól 99999-ig vannak megszámozva, és van 1000 dobozunk is, melyek 000-tól 999-ig vannak megszámozva. Egy kártyát egy dobozba akkor lehet belerakni, ha a doboz száma a kártya számából két számjegy elhagyásával kapható meg (így például a 40557-es kártya a 405-ös, a 407-es, a 455-ös, a 457-es, a 055-ös, a 057-es és az 557-es dobozok valamelyikébe tehető). Bele lehet-e rakni a dobozokba az összes kártyát úgy, hogy legalább 666 doboz üresen maradjon?

Megoldás. Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges.

A fő ötlet: a kártyákat úgy helyezzük el a dobozokba, hogy csak olyan dobozt használjunk, amelynek a sorszáma 3-mal osztható. (***2** pont*)

Ez nyilvánvalóan 333 dobozt jelentene, tehát üresen maradna 667 darab, vagyis a feladat feltétele teljesül. (***1** pont*)

Be kell látnunk, hogy minden kártyát el lehet helyezni olyan dobozba, amelynek a sorszáma 3-mal osztható.

Vizsgáljuk a kártyán szereplő számjegyeket a hármas maradékuk szerint!

Ha van köztük három egyforma, akkor ezek meghagyásával a számból olyan háromjegyűt képeztünk, mely osztható hárommal – tehát megfelelő dobozba sorolható. (***1** pont*)

Ugyanez könnyen látszik, ha a számjegyek hármas maradékai között van három különböző, ugyanis ezek összege is osztható lesz hárommal. (***2** pont*)

Innentől csak azon eseteket maradtak, ahol csak kétféle hármas maradék szerepel, és mindkettőből legfeljebb két darab – ez viszont nem lehetséges, ha öt számjegyünk van. (***1** pont*)

Vagyis a kívánt elhelyezés valóban megoldható.

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ