TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2023. március 17.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy szög háromszorosa tompaszög, az ötszöröse viszont homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

Megoldás. Jelöljük α-val a vizsgált szög nagyságát.

Az első feltétel szerint $90° < 3\alpha < 180°$, emiatt $30° < \alpha < 60°$.

A második feltétel szerint $180° < 5\alpha < 360°$, tehát $36° < \alpha < 72°$.

A kapott két feltételt összevetve a megfelelő szögekre $36° < \alpha < 60°$ teljesül.

Ezen határok közötti egész értékek:

$$\underbrace{37, 38, 39 \ldots, 58, 59}_{59-37+1=23 \text{ db}}$$

Tehát **a szög nagysága 23-féle lehet**.

2. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Tasziló 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

Megoldás. Ha Jean minden poharat épségben leszállított volna, akkor $100 \cdot 300 = 30000$ forint ütötte volna a markát. Minden egyes eltört pohár után elesett azonban a szállításért járó 300 forint borravalótól, továbbá 900 forint büntetést is kellett fizetnie, tehát tekinthetjük úgy, hogy poharanként 1200 forint veszteség érte.

Ha végül 24000 forinttal lett gazdagabb a lehetséges 30000 helyett, akkor 6000 forint volt a vesztesége, ami $6000 : 1200 = 5$, azaz **öt pohár** eltörésével jöhetett létre.

Ellenőrzés: Jean a 95 épségben leszállított pohárért $95 \cdot 300 = 28500$ forintot kapott, büntetésül pedig $5 \cdot 900 = 4500$ forintot fizetett, összesen tehát a borravalóból $28500 - 4500 = 24000$ Ft maradt meg. *(Ellenőrzés nélkül is teljes pontszám adható.)*

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Jelöljük meg egy kockának két kitérő élét zölddel. Ki lehet-e választani egy harmadik élt a kockán úgy, hogy az a zöld élek közül

(a) az egyikkel párhuzamos, a másikat metszi?

(b) mindkettőt metszi?

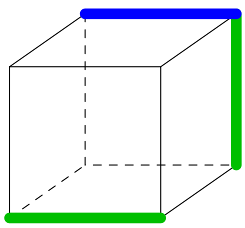
(c) mindkettővel párhuzamos?

Amelyik feladatrésznél ki lehet választani, rajzold le, hogyan; amelyiknél nem, indokold meg, miért nem.

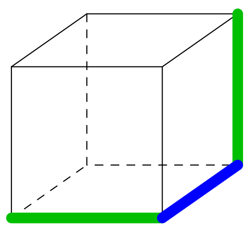
Megoldás. A két adott kitérő élt zölddel megjelöltük. (Bármely kitérő élpár esetén az az ábrán látható helyzetbe forgatható a kocka).

Az **(a) és (b) részben lehetséges a kiválasztás**, az alábbi ábrán kékkel bejelöltünk egy-egy megoldást:

(a)



(b)



A **(c) részre ugyanakkor nem létezhet megoldás**, mivel ha a kék él mindkét zöld éllel párhuzamos volna, akkor a zöld éleknek egymással is párhuzamosnak kellene lenniük.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

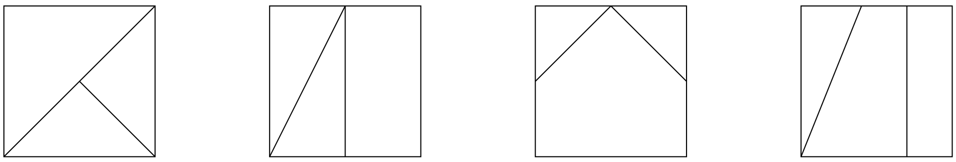
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

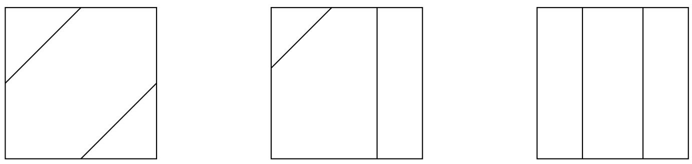
4. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

Megoldás. 7-féle szorzat keletkezhet, mégpedig a következők:

$3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$ $\quad 3 \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{36}$ $\quad 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$ $\quad 3 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{48}$



$3 \cdot 3 \cdot 6 = \mathbf{54}$ $\quad 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$ $\quad 4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{64}$



Hogyan található meg az összes lehetőség?

Először nézzük azt meg, hogy az első vágással milyen darabokat tudunk létrehozni.

Az eseteket jelölhetjük a keletkező sokszögek oldalszámával.

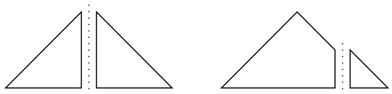
$$(4) \longrightarrow (3,5) \qquad (4) \longrightarrow (4,4) \qquad (4) \longrightarrow (3,3) \qquad (4) \longrightarrow (3,4)$$

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

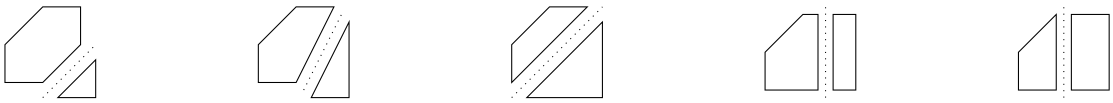
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

A második lépésben vagy egy háromszöget, vagy egy négyszöget, vagy egy ötszöget vágunk ketté. Háromszögből indulva két lehetőségünk van:



$(3) \longrightarrow (3,3)$ $\quad$ $(3) \longrightarrow (4,3)$

A négyszögek lehetséges felvágásainak oldalszámait már korábban (a négyzet szétvágásánál) megadtuk. Végül egy ötszöget ötféle módon vághatunk ketté, ha csak a keletkező darabok oldalszámára vagyunk kíváncsiak:



$(5) \longrightarrow (6,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (5,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (4,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (5,4)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (4,4)$

Az eddig felsorolt vágásokat kombinálva a következő hét eset állítható elő:

$$(3,3,3), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6), (3,4,4), (3,4,5), (4,4,4)$$

2. megközelítés. Vizsgáljuk meg, hogy egy vágással hogyan változhat az előttünk álló sokszögek oldalszámainak összege. Ha egy sokszöget egy átló mentén vágunk ketté, akkor az eredeti oldalak mellett két új oldal alkotja az új sokszögeket, hiszen a vágás egy-egy oldalt jelent mindkét keletkező sokszögben.

Ha a vágás egy csúcson és egy oldal belső pontján megy át, akkor az adott oldalból két oldal keletkezik (két külön sokszögben), ez eggyel növeli a sokszögek összes oldalainak számát, továbbá az előzőhöz hasonlóan a vágás két új oldalt ad, így összesen hárommal nő az oldalak száma.

Ha pedig a vágás két oldal egy-egy belső pontját köti össze, akkor az előzőhöz hasonló meggondolás alapján 4-gyel nő az oldalak száma.

A feladatban négyszögből indulunk ki és két vágást ejtünk egymás után, így legfeljebb 8-cal nőhet az oldalak száma, azaz nem lehet több 12-nél.

Mivel minden sokszög legalább három oldalból áll, így olyan számhármasokat jöhetnek szóba (a darabok oldalszámaiként), amelyek mindegyik tagja legalább 3, és az összegük legfeljebb 12. Ilyenből 7 különböző található:

$$3+3+3=9, \qquad 3+3+4=10, \qquad 3+3+5=11, \qquad 3+4+4=11,$$
$$3+3+6=12, \qquad 3+4+5=12, \qquad 4+4+4=12.$$

És ezek mindegyikéhez található alkalmas szétvágás (mint azt már ábráinkkal megmutattuk).

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Egy utcában 5 ház van, melyekben sorban balról jobbra a következő családok laknak: Almási, Bodnár, Csukás, Dobó és Erdős család. Megkérdeztük a házak lakóit az utcában élő gyerekekről, mire a következő válaszokat kaptuk:

- Almási család: Az utcában 9 gyerek van, az életkoruk 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 illetve 10 év.
- Bodnár család: A két szomszédban lakó gyerekek életkorának összege megegyezik a mi családunkban a gyerekek életkorának összegével.
- Csukás család: Egy gyerek van a családban. Az egyik szomszédban csak nála fiatalabb, a másik szomszédban csak nála idősebb gyerekek laknak.
- Dobó család: Az utcában egyik családnak sincs kettőnél több gyermeke.
- Erdős család: Az utcában bármely két azonos házban élő gyerek közt legalább 3 év korkülönbség van.

Hány éves gyerekek laknak az egyes házakban?

Megoldás. Az utcában összesen 9 gyerek van, a Csukás családban pedig csak 1, így a többi négy házban összesen 8 gyerek van. Mivel minden családban legfeljebb 2 gyerek van, így a másik négy családban 2-2 gyereknek kell lennie.

Mivel bármely két azonos házban élő gyerek közt legalább 3 év a különbség, így ahol két gyerek van, ott a fiatalabb testvér legfeljebb $10 - 3 = 7$ éves lehet. Hasonlóan, bármely idősebb testvérről tudjuk, hogy legalább $2 + 3 = 5$ éves.

Mivel a Csukás család egyik szomszédjában csak nála idősebb gyerekek laknak, így a Csukás család gyereke legfeljebb 6 éves lehet. Ezenkívül a másik szomszédban csak nála fiatalabb gyerekek laknak, így a Csukás család gyereke legalább 6 éves. Ezek alapján a Csukás család gyereke 6 éves, az egyik szomszédban a két gyerek 2 és 5 éves, míg a másik szomszédban lévő két gyerek 7 és 10 éves.

Mivel a Bodnár családban lévő gyerekek életkorainak összege megegyezik a szomszédban lévő gyerekek életkorainak összegével, így ebben a családban lakik a 7 és 10, a Dobó családban a 2 és 5 éves gyerek.

Ez alapján az Almási és Erdős családban lakik a 3, a 4, a 8 illetve a 9 éves gyerek. Ebből az Almási családban lakó két gyerek életkorának összege $10 + 7 - 6 = 11$. Ez csak úgy lehet, ha a 3 és a 8 éves gyerek lakik ott.

Ez alapján **a gyerekek életkorai az egyes családokban: Almási: 3 és 8, Bodnár: 7 és 10, Csukás: 6, Dobó: 2 és 5, Erdős: 4 és 9 év**. Ezek valóban teljesítik az összes feltételt.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ