TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2023. március 17.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Arisztid bált rendez a kastélyában, ezért üvegpoharakat kért kölcsön Taszilótól. Taszilό 100 üvegpoharat küldött Arisztidnek. A poharakat Jean, az inas szállította át, de sajnos útközben a poharak egy része eltört. Arisztid minden egyes épségben leszállított pohárért 300 forint borravalót adott Jeannak, Tasziló viszont 900 forintos büntetést fizettetett Jeannal minden egyes összetört pohárért. Hány poharat tört össze Jean, ha a kapott borravalóból a büntetés kifizetése után 24000 forintja maradt?

Megoldás. Ha Jean minden poharat épségben leszállított volna, akkor $100 \cdot 300 = 30000$ forint ütötte volna a markát. Minden egyes eltört pohár után elesett azonban a szállításért járó 300 forint borravalótól, továbbá 900 forint büntetést is kellett fizetnie, tehát tekinthetjük úgy, hogy poharanként 1200 forint veszteség érte.

Ha végül 24000 forinttal lett gazdagabb a lehetséges 30000 helyett, akkor 6000 forint volt a vesztesége, ami $6000 : 1200 = 5$, azaz **öt pohár** eltörésével jöhetett létre.

Ellenőrzés: Jean a 95 épségben leszállított pohárért $95 \cdot 300 = 28500$ forintot kapott, büntetésül pedig $5 \cdot 900 = 4500$ forintot fizetett, összesen tehát a borravalóból $28500 - 4500 = 24000$ Ft maradt meg. *(Ellenőrzés nélkül is teljes pontszám adható.)*

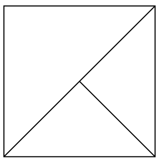
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

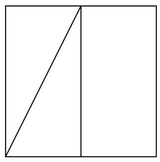
2. Levente egy négyzet alakú papírt egy egyenes vágással két részre osztott. Ezután az egyik darabot egy újabb egyenes vágással megint két részre osztotta. Így három darab sokszög alakú papírlapja lett, melyek mindegyikére ráírta, hogy hány oldalú sokszög. Ezt a három számot összeszorozta. Mi lehetett a kapott szorzat?
Keress példát minél többféle lehetséges szorzatra, és minden szorzathoz rajzolj egy lehetséges feldarabolást. *Nem kell indokolnod, hogy más lehetőség nincsen.*

Megoldás. 7-féle szorzat keletkezhet, mégpedig a következők:

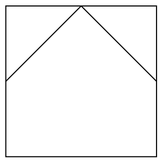
$3 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{27}$



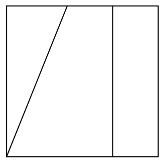
$3 \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{36}$



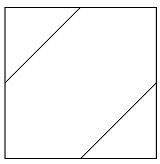
$3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45}$



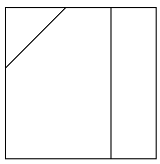
$3 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{48}$



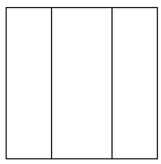
$3 \cdot 3 \cdot 6 = \mathbf{54}$



$3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{60}$

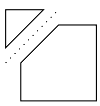


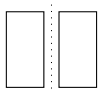
$4 \cdot 4 \cdot 4 = \mathbf{64}$

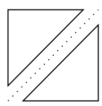


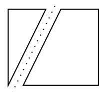
Hogyan található meg az összes lehetőség?

Először nézzük azt meg, hogy az első vágással milyen darabokat tudunk létrehozni.









Az eseteket jelölhetjük a keletkező sokszögek oldalszámával.

$$(4) \longrightarrow (3,5) \qquad (4) \longrightarrow (4,4) \qquad (4) \longrightarrow (3,3) \qquad (4) \longrightarrow (3,4)$$

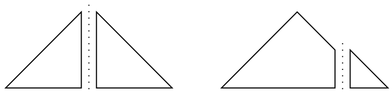
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

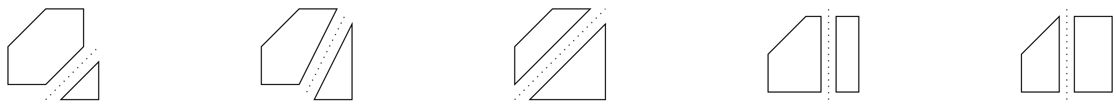
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

A második lépésben vagy egy háromszöget, vagy egy négyszöget, vagy egy ötszöget vágunk ketté. Háromszögből indulva két lehetőségünk van:



$(3) \longrightarrow (3,3)$ $\quad$ $(3) \longrightarrow (4,3)$

A négyszögek lehetséges felvágásainak oldalszámait már korábban (a négyzet szétvágásánál) megadtuk. Végül egy ötszöget ötféle módon vághatunk ketté, ha csak a keletkező darabok oldalszámára vagyunk kíváncsiak:



$(5) \longrightarrow (6,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (5,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (4,3)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (5,4)$ $\quad$ $(5) \longrightarrow (4,4)$

Az eddig felsorolt vágásokat kombinálva a következő hét eset állítható elő:

$$(3,3,3), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6), (3,4,4), (3,4,5), (4,4,4)$$

2. megközelítés. Vizsgáljuk meg, hogy egy vágással hogyan változhat az előttünk álló sokszögek oldalszámainak összege. Ha egy sokszöget egy átló mentén vágunk ketté, akkor az eredeti oldalak mellett két új oldal alkotja az új sokszögeket, hiszen a vágás egy-egy oldalt jelent mindkét keletkező sokszögben.

Ha a vágás egy csúcson és egy oldal belső pontján megy át, akkor az adott oldalból két oldal keletkezik (két külön sokszögben), ez eggyel növeli a sokszögek összes oldalainak számát, továbbá az előzőhöz hasonlóan a vágás két új oldalt ad, így összesen hárommal nő az oldalak száma.

Ha pedig a vágás két oldal egy-egy belső pontját köti össze, akkor az előzőhöz hasonló meggondolás alapján 4-gyel nő az oldalak száma.

A feladatban négyszögből indulunk ki és két vágást ejtünk egymás után, így legfeljebb 8-cal nőhet az oldalak száma, azaz nem lehet több 12-nél.

Mivel minden sokszög legalább három oldalból áll, így olyan számhármasokat jöhetnek szóba (a darabok oldalszámaiként), amelyek mindegyik tagja legalább 3, és az összegük legfeljebb 12. Ilyenből 7 különböző található:

$$3+3+3=9, \qquad 3+3+4=10, \qquad 3+3+5=11, \qquad 3+4+4=11,$$
$$3+3+6=12, \qquad 3+4+5=12, \qquad 4+4+4=12.$$

És ezek mindegyikéhez található alkalmas szétvágás (mint azt már ábráinkkal megmutattuk).

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. 12 focista együtt nyaral. Mindenkinek ugyanannyi honfitársa van jelen, és mindenkinek 1-gyel több klubtársa van jelen, mint honfitársa. Hány klubcsapatból lehetnek? Határozd meg az összes lehetőséget. *Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.*

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy a focisták összesen hány országból érkezhettek. Ha mindenkinek ugyanannyi honfitársa van jelen, akkor minden országból ugyanannyian vannak, vagyis az egy országból érkezők száma, így az országok száma is osztója 12-nek.
Megállapíthatjuk, hogy ha mindenkinek 1-gyel több klubtársa van jelen, mint honfitársa, akkor az egy klubból érkezők száma is állandó, és ez a szám eggyel nagyobb, mint az egy országból érkezők száma. Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket:

Országok száma	Egy országból érkezők	Egy klubból érkezők
12	1	2
6	2	3
4	3	4
3	4	5
2	6	7
1	12	13

Mivel a klubcsapatok számát úgy kapjuk meg, hogy tizenkettőt elosztjuk az egy klubból érkezők számával, így a táblázat utolsó három sora nem is ad megoldást, az első három sor alapján pedig **a lehetséges válaszok: 6, 4 vagy 3 klub**.

Megjegyzés: Ezek nyilván elő is fordulhatnak, mivel a focisták klubja sokszor független a hazájuktól, tehát bárhogyan hozzáredelhetjük a 12 focistához a kiválasztott néhány országot/klubot. Egy lehetséges hozzárendelés az alábbi ábrákon látható, ahol a táblázatok sorai a klubokat, oszlopai az országokat jelölik, és minden egyes $\times$ egyetlen játékosnak felel meg.

klub / ország	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	O10	O11	O12
K1	$\times$	$\times$										
K2			$\times$	$\times$								
K3					$\times$	$\times$						
K4							$\times$	$\times$				
K5									$\times$	$\times$		
K6											$\times$	$\times$

klub / ország	O1	O2	O3	O4	O5	O6
K1	$\times$	$\times$	$\times$			
K2	$\times$	$\times$	$\times$			
K3				$\times$	$\times$	$\times$
K4				$\times$	$\times$	$\times$

klub / ország	O1	O2	O3	O4
K1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
K2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
K3	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Igaz-e, hogy 200-nál több különböző háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege legalább annyi, mint a számjegyek szorzata?

Megoldás. Gyűjtsük össze azokat a háromjegyű számokat, amelyben a számjegyek összege legalább annyi, mint a számjegyek szorzata – ezeket nevezzük *jó* számoknak.

Ha van a számban 0 számjegy, akkor a számjegyek szorzata 0, míg az összeg legalább 1, tehát a szám biztosan jó. A 0-t tartalmazó háromjegyű számokat megszámolhatjuk pl. így:

- Ha az utolsó számjegy 0, akkor az első két számjegy $9 \cdot 10 = 90$-féle lehet (az első számjegy nem lehet 0, ezért az csak 9-féle lehet).

- Ha az utolsó számjegy nem 0, akkor a középsőnek 0-nak kell lennie, az első és az utolsó számjegy mindegyike 9-féle lehet, ez $9 \cdot 9 = 81$ lehetőség.

Összesen tehát $90 + 81 = 171$ darab 0-t tartalmazó háromjegyű szám van, és ezek mind jók.

Ha a számban nincs 0, de két 1-es számjegy van, akkor a számjegyek szorzata a harmadik jegy, míg az összeg ennél 2-vel nagyobb. Számoljuk meg ezeket a számokat. Egy olyan szám van, amelyben mindhárom számjegy 1-es, a 111, míg a többi számban van egy 1-nél nagyobb számjegy, amely lehet 8-féle és lehet 3 helyen.

Összesen tehát $1 + 3 \cdot 8 = 25$ darab 0-t nem tartalmazó, de két 1-est tartalmazó háromjegyű szám van, és ezek mind jók. Jók azok a számok is, amelyek egy 1-esből, egy 2-esből és egy 3-asból állnak (ezekben a számjegyösszeg és a számjegyszorzat is 6), ezek: $123, 132, 213, 231, 312, 321$, összesen 6 db.

Ezzel már találtunk $171 + 25 + 6 = 202$ különböző jó számot, tehát **igaz a feladat állítása**.

Megjegyzés. Jók még azok a számok, amelyekben egy 1-es és két 2-es számjegy van (ezekben a számjegyösszeg 5, a számjegyszorzat 4), ezek: $122, 212, 221$, ez összesen 3 db. Enélkül is megvan több, mint 200 darab, míg ezzel együtt, bármelyik korábbi típus kihagyásával sincs meg, így ezek nélkülözhetőek a feladat megoldása szempontjából. Az eddig felsoroltakon kívül más jó szám nincs, de ennek bizonyítása nem képezi a feladat megoldásának részét.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Felírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

Megoldás. Akármilyen sorrendben is írtuk a számokat az első sorba, a második sortól kezdve a hatodik (jobb szélső) szám biztosan 0 lesz, hiszen a fölötte levő számtól jobbra nincs semmi.

A harmadik sortól kezdve az ötödik szám is biztosan 0, hiszen a fölötte levő számtól jobbra csak egy 0 szerepel, az pedig nem lehet nagyobb egy természetes számnál.

Ezt a gondolatot folytatva azt kapjuk, hogy

- a negyedik sortól kezdve már a negyedik szám is csak 0 lehet;
- az ötödik sortól kezdve már a harmadik szám is csak 0 lehet;
- a hatodik sortól kezdve már a második szám is csak 0 lehet;
- a hetedik sortól kezdve már az első szám is csak 0 lehet.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	**0**
?	?	?	?	**0**	**0**
?	?	?	**0**	**0**	**0**
?	?	**0**	**0**	**0**	**0**
?	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

3	**4**	**1**	**5**	**0**	**2**
2	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Azaz a hetedik sorba (ha egyáltalán eljutunk eddig a játékban) biztosan csupa 0-t kell írnunk. Tehát 7 sornál többet biztosan nem írhattunk le.
7 sor viszont létrejöhetett, például a bal oldali ábrán látható módon.
Tehát legfeljebb 7 sort írhattunk egymás alá.

Hogyan találhatunk hétsoros táblázatokat?

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	$\boxed{?}$	**0**
?	?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**
?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**
?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	**1**	**0**
?	?	?	**1**	**0**	**0**
?	?	**1**	**0**	**0**	**0**
?	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Ha bármelyik $\boxed{?}$ helyére 0-t írnánk, akkor az alatta levő $\boxed{?}$-ek is mind 0-k kellene legyenek. Tehát egyik sem lehet 0, ha el szeretnénk jutni a hetedik sorig.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT 1841

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: `www.kalmarverseny.hu`
Adószám: 19002457-2-42

Másrészt a $\boxed{?}$-ek helyére 1-nél nagyobb szám sem kerülhet: a fölöttük levő számtól jobbra egyetlen kivétellel csak 0-k állnak.

Tehát mindegyik $\boxed{?}$ helyén 1-nek kell állnia.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	$\boxed{?}$	**1**	**0**
?	?	$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**
?	$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

?	?	?	?	?	?
?	?	?	**0**	**1**	**0**
?	?	**0**	**1**	**0**	**0**
?	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Most a $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőkön csak 0 állhat, hiszen alattuk 1 van, míg tőlük jobbra csak egyetlen pozitív szám áll, és az is 1-es.

A továbbiakban már nem lehet egyértelműen meghatározni az egyes mezőkön álló számokat, de viszonylag kevés lehetőségre korlátozhatunk.

A jobb oldali ábrán $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőn nem állhat sem 0 (akkor alatta nem 0 lenne), sem 2-nél nagyobb szám (a felette levőtől jobbra levők közt legfeljebb 2 pozitív lehet).

?	?	?	?	?	?
?	?	?	**0**	**1**	**0**
?	?	**0**	**1**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Ha $\boxed{?}$ = 1, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

1 2 0 1 0 0

Ha $\boxed{?}$ = 2, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

0 X 0 1 0 0

ahol **X** lehet 1 vagy 2.

A harmadik sorból visszafele következtetve a második sorra összesen $3+10+12 = 25$-féle lehetőség adódik. A második sor pedig egyértelműen meghatározza az első sort (kihasználva, hogy az első sorban a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok szerepelnek valamilyen sorrendben).

Így összesen **25-féle hétsoros táblázat van**, melyek első sorai:

031524	041523	042513	051423	052413
053412	130524	140523	142503	150423
152403	153402	230514	240513	241503
250413	251403	253401	341502	350412
351402	352401	450312	451302	452301

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ