TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2023. március 17.

HETEDIK OSZTÁLY

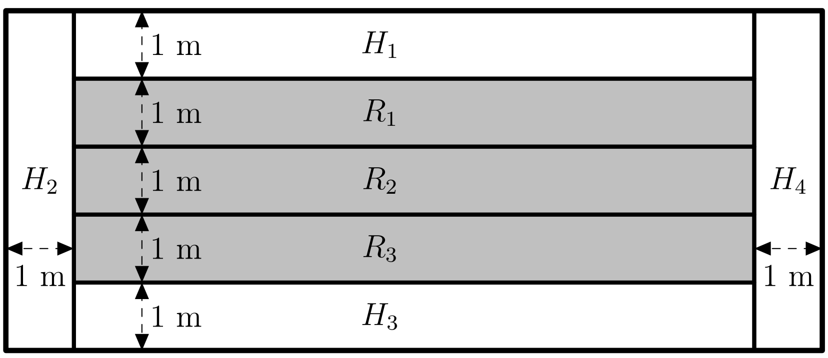
MEGOLDÁSOK

1. Néhány focista együtt nyaral, összesen 8 országból. Minden játékosnak 3 klubtársa és 2 honfitársa van jelen. Hány klubcsapatból érkeztek a nyaralásra?
Minden játékosnak pontosan egy hazája van és pontosan egy klubnak tagja.

Megoldás. Mivel minden focistának 2 honfitársa van jelen, így minden országból 3 focista jött, azaz $8 \cdot 3 = 24$ focista van a nyaraláson. Mivel minden focistának 3 klubtársa van jelen, így minden klubból 4 focista jött, azaz $24/4 =$ **6 klubból** érkeztek focisták a nyaralásra.

2. Luca téglalap alakú kertjében hagymát és répát termeszt. A kertet úgy alakította ki, hogy mind a négy oldala mentén 1 m széles sávban termeszt hagymát, a megmaradó belső részben pedig répát. Így pontosan ugyanakkora területen termeszt hagymát és répát.
A kert egyik oldala 5 m hosszú. Milyen hosszú a másik oldal?

Megoldás. Osszuk fel a kertet az ábra szerinti elrendezésben $5 + 2$ kisebb téglalapra.



Így a répa éppen a három belső téglalapban terem (R_1, R_2, R_3, az ábrán szürke háttérrel), a hagyma pedig a külső négyben (H_1, H_2, H_3, H_4). R_1 és H_1 egyforma területű (mivel egybevágó téglalapok), hasonlóan R_3 és H_3 is egyforma területű, tehát R_2 területe éppen meg kell egyezzen H_2 és H_4 területének összegével.

Mivel a téglalapok ugyanolyan szélesek, R_2 hosszúsága éppen H_2 és H_4 hosszúságának összege, azaz $5 + 5 = 10$ méter. Így a kert másik oldala $1 + 10 + 1 =$ **12 méter** hosszú.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

3. Karcsi telefonja különböző városok hőmérsékletértékét is kijelzi, napszakonként, Celsius-fokban mérve. Egy éjszaka során Szegeden és Balassagyarmaton estéről reggelre ugyanannyi Celsius-fokkal lett hidegebb. Karcsi azt is észrevette, hogy ha kivonja a szegedi reggeli hőmérsékletértékből az estit, akkor a balassagyarmati reggeli értéket kapja, ha viszont összeadja a balassagyarmati esti és reggeli hőmérsékletértékeket, az pont annyi, mint a szegedi reggeli hőmérsékletérték ellentettjének kétszerese. Ha a szegedi esti hőmérséklet 6°C volt, mekkora volt a reggeli?

Megoldás. Mivel egyrészt estéről reggelre ugyanannyi Celsius-fokkal lett hidegebb a két településen, másrészt a szegedi reggeli és az esti hőmérséklet különbsége megegyezik a balassagyarmati reggeli hőmérséklettel, észrevehető, hogy a balassagyarmati reggeli hőmérséklet megegyezik a balassagyarmati reggeli és esti hőmérséklet különbségével.

Ebből a balassagyarmati esti hőmérséklet 0 (°C).

Így viszont a balassagyarmati reggeli és esti hőmérsékletek összege megegyezik a reggeli hőmérséklettel, ami a feladat szerint egyrészt egyenlő a szegedi reggeli és esti hőmérséklet különbségével (azaz a reggeli hőmérséklet mínusz hattal), másrészt a szegedi reggeli hőmérséklet ellentettjének kétszeresével. Egyenlettel, ha a szegedi reggeli hőmérsékletet x-rel jelöljük:

$$\begin{aligned} -2x &= x-6 \\ -3x &= -6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Így a balassagyarmati reggeli hőmérséklet -4 (°C), és ezek a számok tényleg kielégítik a feladat feltételeit. **A szegedi reggeli hőmérséklet tehát 2°C volt.**

Második megoldás. Ábrázoljuk táblázatban a feladatban szereplő négy hőmérsékletértéket, figyelembe véve, hogy a két sorban azonos az esti és reggeli érték különbsége.

	este	reggel
Szeged	6	x
Balassagyarmat	y	$y+(x-6)$

Karcsi első megfigyelése szerint $x-6=y+(x-6)$, azaz $y=0$.

	este	reggel
Szeged	6	x
Balassagyarmat	0	$x-6$

Karcsi második észrevétele azt jelenti, $0+(x-6)=-2x$, vagyis $x-6=-2x$.

Ezt az egyenletet megoldva $x=2$ adódik, és a táblázatunk kitöltése után könnyen látható, hogy az összes feltételnek megfelelő megoldást kaptunk.

	este	reggel
Szeged	6	2
Balassagyarmat	0	-4

Tehát Szegeden 2°C volt reggel a hőmérséklet.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Felírtuk a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ számokat valamilyen sorrendben egy sorba. Ezután minden szám alá odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra, így kaptunk a második sorban hat újabb számot. Ezek mindegyike alá is odaírtuk, hogy hány darab nála nagyobb szám áll a saját sorában tőle jobbra. Ezt a lépést ismételgettük, de amint leírtunk egy olyan sort, amiben csak a 0 szerepelt, befejeztük az eljárást.
Legfeljebb hány sort írhattunk egymás alá?

Megoldás. Akármilyen sorrendben is írtuk a számokat az első sorba, a második sortól kezdve a hatodik (jobb szélső) szám biztosan 0 lesz, hiszen a fölötte levő számtól jobbra nincs semmi.

A harmadik sortól kezdve az ötödik szám is biztosan 0, hiszen a fölötte levő számtól jobbra csak egy 0 szerepel, az pedig nem lehet nagyobb egy természetes számnál.

Ezt a gondolatot folytatva azt kapjuk, hogy

- a negyedik sortól kezdve már a negyedik szám is csak 0 lehet;
- az ötödik sortól kezdve már a harmadik szám is csak 0 lehet;
- a hatodik sortól kezdve már a második szám is csak 0 lehet;
- a hetedik sortól kezdve már az első szám is csak 0 lehet.

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	?	**0**
?	?	?	?	**0**	**0**
?	?	?	**0**	**0**	**0**
?	?	**0**	**0**	**0**	**0**
?	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

3	**4**	**1**	**5**	**0**	**2**
2	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
2	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Azaz a hetedik sorba (ha egyáltalán eljutunk eddig a játékban) biztosan csupa 0-t kell írnunk. Tehát 7 sornál többet biztosan nem írhattunk le.
7 sor viszont létrejöhetett, például a bal oldali ábrán látható módon.
Tehát legfeljebb 7 sort írhattunk egymás alá.

Hogyan találhatunk hétsoros táblázatokat?

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	$\boxed{?}$	**0**
?	?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**
?	?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**
?	$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**
$\boxed{?}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

?	?	?	?	?	?
?	?	?	?	**1**	**0**
?	?	?	**1**	**0**	**0**
?	?	**1**	**0**	**0**	**0**
?	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Ha bármelyik $\boxed{?}$ helyére 0-t írnánk, akkor az alatta levő $\boxed{?}$-ek is mind 0-k kellene legyenek. Tehát egyik sem lehet 0, ha el szeretnénk jutni a hetedik sorig.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Másrészt a $\boxed{?}$-ek helyére 1-nél nagyobb szám sem kerülhet: a fölöttük levő számtól jobbra egyetlen kivétellel csak 0-k állnak.

Tehát mindegyik $\boxed{?}$ helyén 1-nek kell állnia.

$$\begin{array}{cccccc}
? & ? & ? & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & \boxed{?} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
? & ? & \boxed{?} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
? & \boxed{?} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\boxed{?} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
? & ? & ? & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
? & ? & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
? & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Most a $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőkön csak 0 állhat, hiszen alattuk 1 van, míg tőlük jobbra csak egyetlen pozitív szám áll, és az is 1-es.

A továbbiakban már nem lehet egyértelműen meghatározni az egyes mezőkön álló számokat, de viszonylag kevés lehetőségre korlátozhatunk.

A jobb oldali ábrán $\boxed{?}$-lel megjelölt mezőn nem állhat sem 0 (akkor alatta nem 0 lenne), sem 2-nél nagyobb szám (a felette levőtől jobbra levők közt legfeljebb 2 pozitív lehet).

$$\begin{array}{cccccc}
? & ? & ? & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
? & ? & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\boxed{?} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{array}$$

Ha $\boxed{?} = 1$, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

$$\mathbf{1}\quad \mathbf{2}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}$$

Ha $\boxed{?} = 2$, akkor felette levő (azaz harmadik) sor így nézhet csak ki:

$$\mathbf{0}\quad \mathbf{X}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}$$

ahol **X** lehet 1 vagy 2.

A harmadik sorból visszafele következtetve a második sorra összesen $3+10+12=25$-féle lehetőség adódik. A második sor pedig egyértelműen meghatározza az első sort (kihasználva, hogy az első sorban a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számok szerepelnek valamilyen sorrendben).

Így összesen **25-féle hétsoros táblázat van**, melyek első sorai:

031524	041523	042513	051423	052413
053412	130524	140523	142503	150423
152403	153402	230514	240513	241503
250413	251403	253401	341502	350412
351402	352401	450312	451302	452301

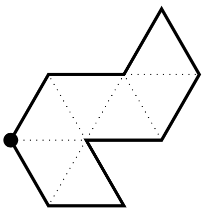
A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

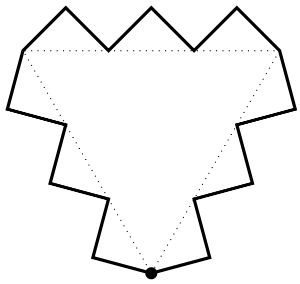
5. (a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
(b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$*-os, sem* $180°$*-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.*

Megoldás. Mindkét részre sokféle konstrukció adható, ezek közül néhány lehetőséget mutatunk be. A sokszög belső szögeit a megjelölt csúcsból indulva, az óramutató járása szerint haladva soroltuk fel.

(a)

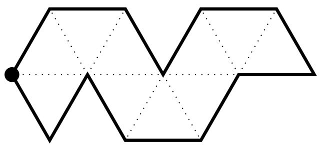


120°, 120°, 240°, 60°, 120°,
120°, 300°, 60°, 120°
(Szabályos háromszögrácsra
rajzolt sokszög)

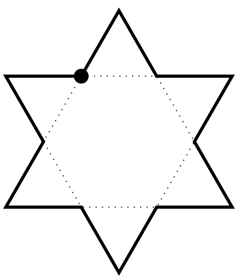


150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°,
90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°
(Szabályos háromszög oldalaihoz rögzített
háromfokú lépcsők)

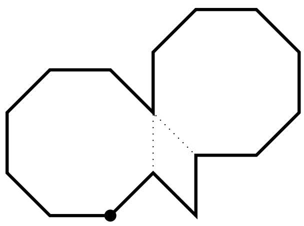
(b)



120°, 120°, 120°, 300°, 120°, 120°
60°, 240°, 120°, 120°, 300°, 60°
(Szabályos háromszögrácsra
rajzolt sokszög)



felváltva 240° és 60°
(Szabályos hatágú csillag)



135° (6 db), 315°, 135° (6 db), 270°, 45°, 270°,
(Két szabályos nyolcszög összekapcsolva)

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ