TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

52. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2023. március 17.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy szög kétszerese hegyesszög, háromszorosa tompaszög, az ötszöröse pedig homorúszög. Hányféle lehet a szög nagysága, ha fokban mérve egész szám?

Megoldás. Jelöljük α-val a vizsgált szög nagyságát.

Az első feltétel szerint $0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$, vagyis $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

A második feltétel szerint $90^\circ < 3\alpha < 180^\circ$, emiatt $30^\circ < \alpha < 60^\circ$.

A harmadik feltétel szerint $180^\circ < 5\alpha < 360^\circ$, tehát $36^\circ < \alpha < 72^\circ$.

A kapott feltételeket összevetve a megfelelő szögekre $36^\circ < \alpha < 45^\circ$ teljesül.

Ezen határok közötti egész értékek:

$$\underbrace{37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44}_{8 \text{ db}}$$

Tehát **a szög nagysága 8-féle lehet**.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;

Honlap: www.kalmarverseny.hu

Adószám: 19002457-2-42

2. Melyik a nagyobb és mennyivel: a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege vagy a 100-nál nem nagyobb, 4-gyel osztva 2 vagy 3 maradékot adó természetes számok négyzeteinek az összege?

Megoldás. A feladatban az alábbi két összeg közti különbséget kell meghatározni:

$$A = 1^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + ... + 100^2 \quad \text{és} \quad B = 2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + ... + 99^2$$

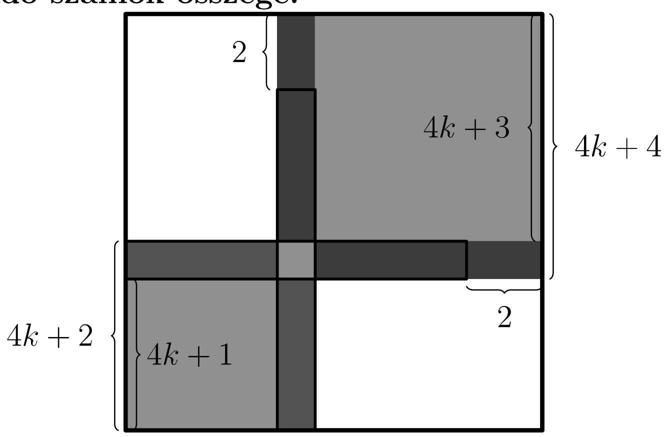
Bontsuk 4-es csoportokra a számokat, majd minden $0 \leq k \leq 24$-re vegyük a $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, $4k+4$ alakú számokat.

Minden ilyen csoportból 2 szám, a $4k+1$ és $4k+4$ alakú lesz az A összegben, 2 szám pedig, a $4k+2$ és $4k+3$ alakú lesz a B összegben. Vegyük ebben az A-beli és B-beli elemek különbségét:

$$\begin{aligned}
&(4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2 = \\
&= 16k^2 + 8k + 1 - 16k^2 - 16k - 4 - 16k^2 - 24k - 9 + 16k^2 + 32k + 16 = \\
&= (16 - 16 - 16 + 16)k^2 + (8 - 16 - 24 + 32)k + (1 - 4 - 9 + 16 = 4.
\end{aligned}$$

Ez minden 4-es csoportra igaz lesz, vagyis $4 \cdot 25 =$ **100-zal nagyobb a 0 vagy 1 maradékot adó számok összege, mint a 2 vagy 3 maradékot adó számok összege.**

Megjegyzés: Azt, hogy az ilyen 4-es csoportokban miért 4 lesz a különbség, az alábbi ábrával is lehet szemléltetni. Vegyünk egy $8k+5$ oldalhosszúságú négyzetet. Először rakjuk bele a $4k+1$ és a $4k+4$ oldalhosszúságú négyzeteket, majd a $4k+2$ és $4k+3$ oldalhosszúságúakat az ábrán látható módon. Ekkora a keresett érték a kék terület nagyságából a piros terület nagysága, ami pontosan 4 lesz.



A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

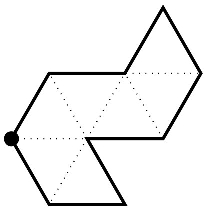
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

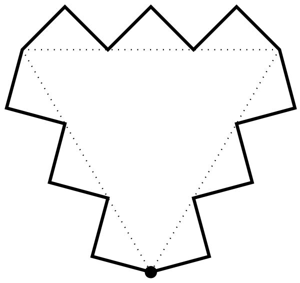
3. (a) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 2 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
(b) Mutassunk példát olyan sokszögre, amelynek minden oldala egyenlő hosszú és minden oldala pontosan 3 másik oldalával párhuzamos. Adjuk meg a sokszög összes szögét.
A sokszögnek nem lehet sem $0°$*-os, sem* $180°$*-os szöge. A sokszög nem metszheti önmagát, azaz a nem szomszédos oldalainak nem lehet közös pontja.*

Megoldás. Mindkét részre sokféle konstrukció adható, ezek közül néhány lehetőséget mutatunk be. A sokszög belső szögeit a megjelölt csúcsból indulva, az óramutató járása szerint haladva soroltuk fel.

(a)

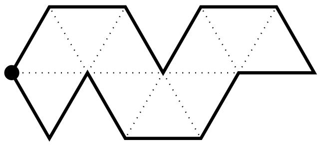


120°, 120°, 240°, 60°, 120°,
120°, 300°, 60°, 120°
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)

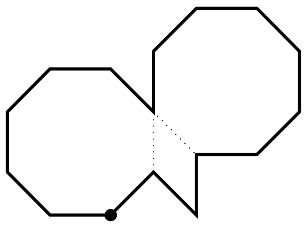


150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°,
90°, 270°, 90°, 150°, 90°, 270°, 90°, 270°, 90°
(Szabályos háromszög oldalaihoz rögzített háromfokú lépcsők)

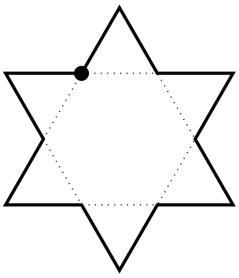
(b)



120°, 120°, 120°, 300°, 120°, 120°
60°, 240°, 120°, 120°, 300°, 60°
(Szabályos háromszögrácsra rajzolt sokszög)



135° (6 db), 315°, 135° (6 db), 270°, 45°, 270°,
(Két szabályos nyolcszög összekapcsolva)



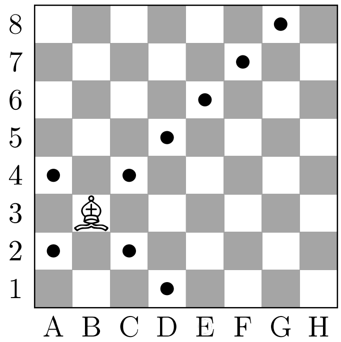
felváltva 240° és 60°
(Szabályos hatágú csillag)

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

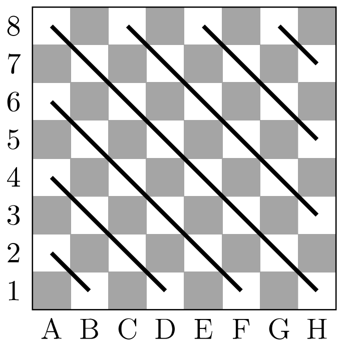
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

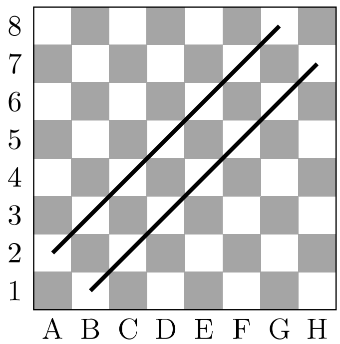
4.
Hányféleképpen lehet egy sakktáblán 14 mezőt megjelölni úgy, hogy egy futó egyik megjelölt mezőről se tudjon egy lépésben eljutni egy másik megjelölt mezőre?

A futó átlósan lép, tehát például a B3 mezőn álló futó az ábrán pöttyel megjelölt mezőkre juthat el egy lépésben.



Megoldás. A sakktáblán a fehér mezőkön álló futók csak fehér mezőkre tudnak lépni, ugyanígy a sötét mezőkön állók csak sötét mezőre. Tekintsük az első ábrán berajzolt hét átlót!





Ezek mindegyikén legfeljebb egy megjelölt pont lehet, de ugyanezt elmondhatjuk ennek elforgatottjaként hét, sötét mezőket tartalmazó átlóra is, ezek együtt pedig lefedik a sakktáblát, tehát az itt feltüntetett átlók mindegyikén is kell, hogy legyen egy megjelölt pont.

Tekintsük a két legrövidebb átlót. Ha A2-t megjelöljük, akkor G8-at nem lehet, csak H7-et, hasonlóan, ha A2 helyett B1-et jelöljük, akkor a másik legrövidebb átlón csak G8 jöhet szóba. A két legrövidebb átlón megjelölt két pont tehát kétféle helyzetben lehet.

Ez a két megjelölt pont együttesen lefedi a második ábrán szereplő két átlót, tehát a következő (4 mezőből álló) átlók esetén megintcsak két-két pont jöhet szóba, hasonlóan kétféle felállásban (A4 és H5 vagy D1 és E8.)

A gondolatmenetet folytatva a 6 mezőből álló átlóknak szintén csak a végpontjaiból választhatunk, újfent kétféleképpen (A6 és H3 vagy F1 és C8).

Végül a leghosszabb átlóban két mező maradt. Ezek bármelyike az előzőektől függetlenül választható. Mivel minden eddigi döntés az előzőektől független volt, így a lehetőségek száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ugyanezeket elmondhatjuk a sötét mezőket tartalmazó átlókról is, továbbá a világos mezők jelölései nem befolyásolják a sötét mezőkét, tehát ott is 16-féle lehetőségünk van. Összesen pedig ezek szorzata adja a megfelelő megjelölések számát.

Tehát $16 \cdot 16 =$ **256-féleképpen lehet a mezőket a feltételeknek megfelelően megjelölni**.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu;
Honlap: www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Az a számot leírtam kétszer egymás után, így kaptam a b számot. Érdekes módon b osztható a^2-tel. Mennyi lehet a hányados?
Az a és b számok tízes számrendszerben felírt pozitív egészek.

Megoldás. Ha a egy n-jegyű szám, akkor $b = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1 \text{ db}}1 \cdot a = (10^n + 1) \cdot a$.

A keresett hányadost nevezzük c-nek. c nyilván egy 1-nél nagyobb egész szám, továbbá:

$$c = \frac{b}{a^2} = \frac{(10^n + 1) \cdot a}{a^2} = \frac{10^n + 1}{a}$$

Tehát c osztója $(10^n + 1)$-nek, másrészt pedig legfeljebb 11, hiszen

$$\frac{10^n + 1}{11} \leq \frac{10^n + 10^{n-1}}{11} = 10^{n-1} \leq a$$

Egyenlőség csak $n = 1$ esetén állhat fenn, ehhez $a = 1$ esetén valóban 11 lesz a hányados, hiszen

$$\frac{b}{a^2} = \frac{11}{1} = 11.$$

Milyen 11-nél kisebb szám oszthatja a $10^n + 1$ számot?
Sem a páros számok, sem az 5 sem jöhet szóba, mivel $10^n + 1$ utolsó számjegye 1.
Továbbá, $10^n + 1$ nem lehet osztható 3-mal és 9-cel sem, hiszen a számjegyeinek összege 2.
Így a 11-en kívül egyetlen lehetőség maradt: $c = 7$.
Ez tényleg meg is valósulhat. Mivel $1001 = 7 \cdot 143$, így ha $a = 143$, akkor $b = 143143$, és így:

$$\frac{b}{a^2} = \frac{143143}{143^2} = 7.$$

Tehát a hányados lehet 7 vagy 11, más érték nem lehetséges.

Megjegyzés: Más példa is van a $c = 7$ esetre, pl. $a = 142857143$.
Általánosan: tetszőleges k pozitív egész esetén $a = (10^{6k+3} + 1)/7$ választással a b/a^2 hányados 7, $a = 1$ esetén a hányados 11, egyébként pedig nem egész.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Pintér Richárd.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03097. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

EMBERI ERŐFORRÁS TÁMOGATÁSKEZELŐ