



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2024. május 24.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

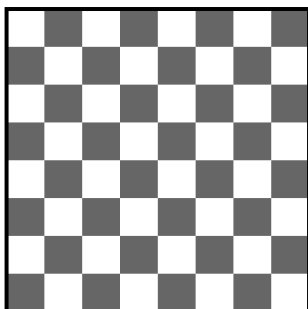
1. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyre igaz, hogy a 4-szeresének az első és az utolsó számjegye is 4-es?

Megoldás. Minden négyjegyű szám kisebb, mint 10000, ezért a négyszerese kisebb, mint 40000. Tehát, ha egy négyjegyű szám négyszerese 4-es számjeggyel kezdődik, akkor az 4000 és 4999 között van. Mivel $\frac{4000}{4} = 1000$, valamint $\frac{4999}{4} = 1249\frac{3}{4}$, ezért a kiinduló számunk legalább 1000, legfeljebb 1249 lehet.

Ezek közül csak azok lesznek jók, amiknek a négyszerese négyesre végződik, ez pedig a szám utolsó számjegyén múlik. Mégpedig úgy, hogy ha a szám utolsó jegye 1 vagy 6, akkor a négyszeresének utolsó számjegye 4 lesz, egyébként pedig nem.

Ez azt jelenti, hogy 1000 és 1249 között – ebből a 250 darab egymást követő számból – minden ötödik megfelelő. Vagyis 50 olyan szám van, amely megfelel a feladat feltételeinek.

2. Egy robot egy 8×8 -as sakktábla minden fehér mezőjére ráírta, hogy az a mező hány fekete mezővel szomszédos.



(a) Mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

(b) Ezt követően egy 80×80 -as, sakktáblaszerűen kiszínezett négyzet mezőivel tette meg ugyanezt. Ezen a táblán mennyi a fehér mezőkre írt számok összege?

Megoldás. A fehér mezőkbe csak 2, 3, vagy 4 kerülhet, hiszen ennyi fekete mezővel lehetnek szomszédosak a fehér mezők. Számoljuk össze, hogy melyik szám hányszor szerepel a táblán.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2-es csak a két fehér sarokmezőbe kerül. 3-as a sakktábla széleinél lesz, összesen 12 mezőben. Mivel 32 fehér mező van, ebből 14 mezőbe írt a robot 2-t vagy 3-at, a maradék 18 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege

$$2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 112.$$

A második feladatrészben hasonlóan gondolkozhatunk. 2-es itt is csak a két fehér sarokmezőben lesz. A két sarkot leszámítva minden szélén 78 mező van, ezeknek a fele fehér, tehát minden szélén 39 fehér mező van,

vagyis összesen $4 \cdot 39 = 156$ olyan mező lesz, amibe a robot a 3-as számot írta.

A négyzetben $\frac{80 \cdot 80}{2} = 3200$ fehér mező van, ebből már 158 mezőbe került szám, a maradék 3042 mezőbe kerül 4-es.

Így a beírt számok összege ebben az esetben

$$2 \cdot 2 + 156 \cdot 3 + 3042 \cdot 4 = 12640.$$

3. Boribon és Annipanni felváltva mondanak számokat. Először Annipanni mond egy pozitív egész számot. Boribonnak mindig az a feladata, hogy az Annipanni által utoljára mondott számot felbontsa tetszőlegesen két pozitív egész szám összegére, s ezt a két számot mondja ki. Annipanni ezután a Boribon által mondott két szám szorzatát mondja. Ezt folytatják, amíg kedvük tartja.

Ha Annipanni először 24-et mondott, akkor lehetséges-e, hogy egyszer a 2024-et is kimondja?

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha Boribon bármikor az Annipanni által mondott számot úgy bontja fel két szám összegére, hogy az egyik az 1, akkor a kapott számok szorzataként Annipanni éppen eggyel kisebb számot fog mondani, mint azelőtt.

Tehát, ha sikerül egyszer Annipanninak 2024-nél nagyobb számot mondania, akkor onnan biztosan megoldható, hogy a 2024-et is kimondja.

Erre számtalan különböző megoldás készíthető, egyet szemléltet az alábbi táblázat:

Annipanni	24		140		4000		3999		3998	...
Boribon		10 és 14		100 és 40		1 és 3999		1 és 3998		...

Tehát lehetséges, hogy Annipanni kimondja a 2024-et.





**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

4. Április 1-jén reggel egyetlen 0 állt egy táblán. Ezután minden nap délben annyit adtunk hozzá a táblán lévő számhoz, vagy vontunk ki belőle, ahányadika volt éppen, majd az így kapott eredményt írtuk a táblán szereplő szám helyére. (Tehát április 1-jén este vagy 1, vagy -1 állt a táblán.)

(a) Állhatott-e április 10-én este a táblán a 22?

(b) Állhatott-e április 10-én este a táblán a -37 ?

Megoldás. Tegyük fel, hogy minden nap kivonunk a táblán szereplő számból. Alább látjuk, hogy hogyan változott napról napra a táblára írt szám.

$$0 \rightarrow (-1) \rightarrow (-3) \rightarrow (-6) \rightarrow (-10) \rightarrow (-15) \rightarrow (-21) \rightarrow (-28) \rightarrow (-36) \rightarrow (-45) \rightarrow (-55)$$

Ebben az esetben tehát április 10-én este a -55 szerepelne. Ha egy adott napon a kivonás helyett hozzáadtunk volna, azáltal a következő érték az adott szám kétszeresével nő, majd emiatt innentől kezdve mindegyik, tehát a -55 helyett is egy páros számmal növelt értéket kapnánk. Mivel egy páratlan számhoz párosat hozzáadva mindig páratlan számot kapunk, ez azt jelenti, hogy a táblán a 10. estén csak páratlan szám szerepelhet. Vagyis a 22 nem állhatott a táblán április 10-én este.

Ahhoz, hogy a -37 -et kapjuk, 18-cal kell növelni az előbb vizsgált összeget. Vagyis, ha a kilencedik napon a 9-et nem kivonjuk, hanem hozzáadjuk az aktuális számhoz, akkor végül éppen -37 lesz a táblán április 10-én este. Ez tehát lehetséges, ahogy alább is láthatjuk.

$$0 \rightarrow (-1) \rightarrow (-3) \rightarrow (-6) \rightarrow (-10) \rightarrow (-15) \rightarrow (-21) \rightarrow (-28) \rightarrow (-36) \overset{+}{\rightarrow} (-27) \rightarrow (-37)$$

Megjegyzés. Természetesen más módon is megkaphatjuk a -37 -et, mindössze arra kell figyelni, hogy 9 legyen azon napok sorszámának összege, melyeken a kivonás helyett hozzáadást végzünk. Így további hét megoldás adódik.

$$0 \overset{+}{\rightarrow} 1 \rightarrow (-1) \rightarrow (-4) \rightarrow (-8) \rightarrow (-13) \rightarrow (-19) \rightarrow (-26) \overset{+}{\rightarrow} (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \rightarrow (-1) \overset{+}{\rightarrow} 1 \rightarrow (-2) \rightarrow (-6) \rightarrow (-11) \rightarrow (-17) \overset{+}{\rightarrow} (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \rightarrow (-1) \rightarrow (-3) \overset{+}{\rightarrow} 0 \rightarrow (-4) \rightarrow (-9) \overset{+}{\rightarrow} (-3) \rightarrow (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \rightarrow (-1) \rightarrow (-3) \rightarrow (-6) \overset{+}{\rightarrow} (-2) \overset{+}{\rightarrow} 3 \rightarrow (-3) \rightarrow (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \overset{+}{\rightarrow} 1 \overset{+}{\rightarrow} 3 \rightarrow 0 \rightarrow (-4) \rightarrow (-9) \overset{+}{\rightarrow} (-3) \rightarrow (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \overset{+}{\rightarrow} 1 \rightarrow (-1) \overset{+}{\rightarrow} 2 \rightarrow (-2) \overset{+}{\rightarrow} 3 \rightarrow (-3) \rightarrow (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

$$0 \rightarrow (-1) \overset{+}{\rightarrow} 1 \overset{+}{\rightarrow} 4 \overset{+}{\rightarrow} 8 \rightarrow 3 \rightarrow (-3) \rightarrow (-10) \rightarrow (-18) \rightarrow (-27) \rightarrow (-37)$$

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



**NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ**



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Az alábbi ábrán egy földterület térképét látjuk, rácsvonalakkal mezőkre bontva. Ábel azt a feladatot kapta, hogy a rácsvonalak mentén ossza fel kerítésekkel a földterületet úgy, hogy a számmal jelzett helyekről pontosan annyi mezőt lehessen kerítés átlépése nélkül elérni (a számot tartalmazó mezőt is beleértve), mint amennyi az adott mezőre van írva. A kerítések által határolt területek mindegyikében szerepelnie kell legalább egy számnak.

Hová építheti Ábel a kerítéseket? Készíts ábrát.

6				4			
			5		7	6	
5		5	5		3		
		3		9			
	6				6		
		6		9			6

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes rajz megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi gondolatok leírásáért, amelyek segítik egy helyes rajz megtalálását.

Megoldás. Látható, hogy a két 3-as nem lehet egy területen, így lesz két különböző 3-as terület. Ezenkívül a bal felső sarokban és az alsó sorban lévő két hatos egyike sem lehet azonos területen, így lesz legalább három darab 6 méretű terület. Ezek alapján kell lennie legalább

$$3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 7 + 9 = 49$$

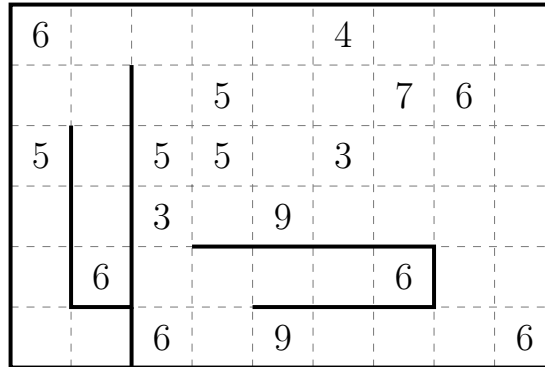
területnek.

Összesen 54 terület van, ami csak úgy jön ki, ha az 5-ös területből is kettő van.

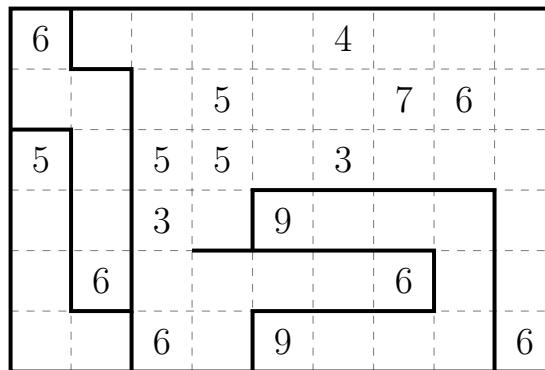
Vagyis ebből az következik, hogy három 6-os terület van. Mivel semelyik három 6-os nem kerülhet egy területre, így mindhárom 6-os területen 2-2 hatosnak kell lennie. Az első oszlopban lévő 6-os csak a második oszlopban lévő 6-ossal lehet együtt. Így a harmadik oszlopban lévő 6-osnak a hetedik oszlopban lévő 6-ossal lesz együtt.

Ezek alapján be tudjuk húzni az alábbi vonalakat.

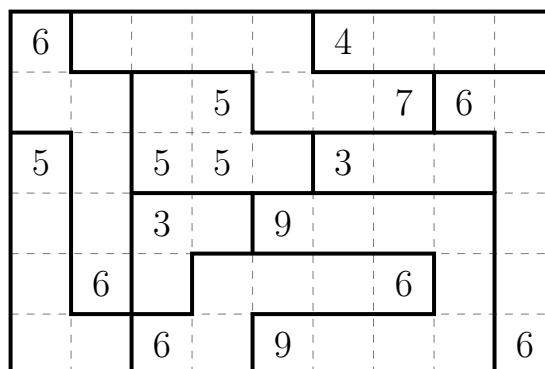




A bal oldali 5-ösnek egy 5 méretű területen kell lennie, illetve a két kilencesnek is azonos területen kell lennie, így még további vonalakat tudunk behúzni.



Végül látható, hogy a második oszlop legfelső mezőjéhez csak a 7-es terület tud elérni. Ezek után már lépésenként behúzható a többi vonal is.



A teljes pontszám eléréséhez elegendő volt ez utóbbi rajz megadása.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ