TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2024. március 22.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Néhány pozitív egész számot felírtam egy lapra (lehet, hogy egy szám többször is szerepel).
A számok szorzata 24, míg az összegük legfeljebb 10.
Hány számot írhattam fel a lapra?
Minden lehetséges darabszámhoz mutass egy-egy példát, hogy mit írhattam a lapra.
Nem kell indokolnod, hogy más darabszám nem lehetséges.

Megoldás. Négyféle lehetséges darabszám van, de az egyes darabszámok bizonyos esetekben többféleképpen is megvalósíthatók:

- 2 szám: $(4, 6)$.
- 3 szám: $(2, 3, 4)$ vagy $(2, 2, 6)$
- 4 szám: $(2, 2, 2, 3)$ vagy $(1, 2, 3, 4)$.
- 5 szám: $(1, 2, 2, 2, 3)$.

2. Hét testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafele úton mindegyik testvér adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így mire hazaértek, az összes testvérnek ugyanannyi almája lett. Hány almát szedett a második legidősebb testvér?

Megoldás. A legidősebb testvér 6 almát ad a testvéreinek, a legfiatalabb pedig 6 almát kap. Mivel így ugyanannyi almájuk van a végén, míg az elején az idősebbnek 2-szer annyi volt, így a kezdetbeni különbségnek épp a legfiatalabbnál lévő almák számának kell lennie.
A különbség 12, tehát kezdetben a legfiatalabb testvérnél 12, a legidősebbnél 24 alma volt.

A végén tehát mindenkinél 18 alma van, így a második legidősebb testvérnél is. A második legidősebb testvér 5 almát adott és egyet kapott a testvéreitől, vagyis a végén 4-gyel volt kevesebb almája, mint amennyit szedett. A második legidősebb testvér tehát **22 almát szedett**.

Ezek alapján a 7 testvér kor szerint növekvő sorrendben $12, 14, 16, 18, 20, 22, 24$ almát szedett.
Mire hazaértek mindenkinek a kosarában 18 alma volt.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

3. Hullámzónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százasokra kerekített értéke nagyobb a számnál.

(a) Melyik a legkisebb hullámzó négyjegyű szám?

(b) Hány hullámzó négyjegyű szám van?

Megoldás. Egy hullámzó szám utolsó, egyes helyiértéken álló számjegye $1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz a tízesekre kerekített érték kisebb a számnál. (Nem lehet 0, mivel akkor a tízesekre kerekített szám egyenlő lenne az eredetivel.)

A tízes helyiértéken álló számjegy $5, 6, 7, 8$ vagy 9 lehet, mert ekkor lesz a százasokra kerekített érték nagyobb a számnál.

A százas helyiértéken álló számjegy $0, 1, 2, 3$ vagy 4 lehet, mert ekkor lesz az ezresekre kerekített érték kisebb a számnál. (Itt lehet 0 számjegy, mert ha az egyesek helyén nem 0 van, akkor az ezresre kerekített érték ebben az esetben is kisebb lesz.)

A szám első számjegye bármely nem 0 számjegy lehet.

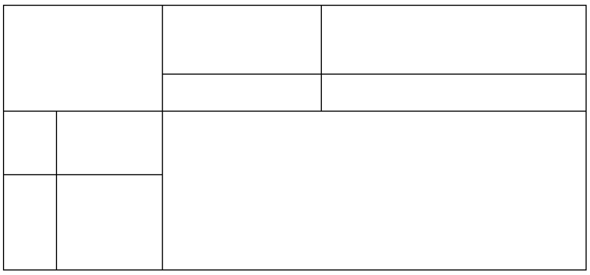
(a) A fenti lehetőségek közül minden esetben a lehető legkisebbet választva azt kapjuk, hogy **1051 a legkisebb négyjegyű hullámzó szám**.

(b) A különböző helyiértékeken a számjegyeket egymástól függetlenül választhatjuk meg,
így $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 =$ **900 hullámzó négyjegyű szám van**.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

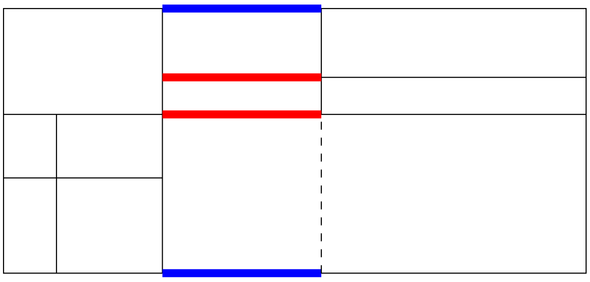
TIT - Kalmár László Matematikaverseny
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Egy téglalapot az alábbi ábra szerint szétvágtunk 10 kisebb téglalapra.



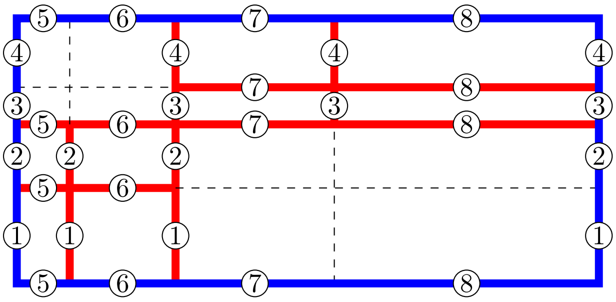
Tudjuk, hogy a 10 kisebb téglalap kerületének összege 6 egység.
Hány egység a nagy téglalap kerülete?
A kis téglalapok oldalainak hossza nem feltétlenül egész számú egység.

Megoldás. Az alábbi ábrán pirossal és kékkel jelölt négy szakasz hossza megegyezik, hiszen a szomszédos párok ugyanannak a téglalapnak a szemközti oldalai.



Amikor a nagy téglalap kerületét számítjuk ki, akkor a kék szakaszokat egyszer, a pirosakat egyszer sem számoljuk bele a kerületbe. Amikor a kisebb téglalapok kerületét számítjuk ki, akkor a kék szakaszokat egyszer, a piros szakaszokat pedig kétszer vesszük figyelembe, hiszen a kék szakaszok pontosan egy kisebb téglalap kerületéhez tartoznak, míg a piros szakaszok pontosan két kisebb téglalap kerületéhez.

A felosztás olyan, hogy minden olyan szakasszal, ami egy kisebb téglalap oldala, pontosan egy másik kisebb téglalap (az adott oldallal nem egyező) oldala párhuzamos, és a kerületen két megfelelő szakaszt találhatunk, ahogy azt az alábbi ábra mutatja (az azonos hosszúságú szakaszokat azonos számok jelölik):



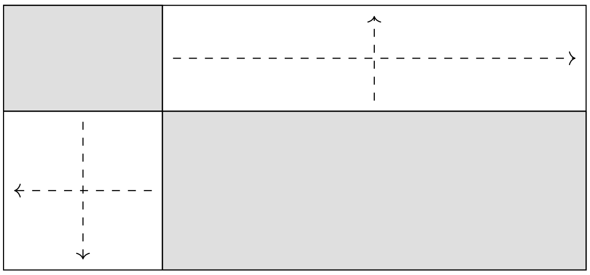
Vagyis, **a kis téglalapok kerületének összege** éppen háromszorosa a nagy téglalap kerületének, ami ebből következően **2 egység**.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

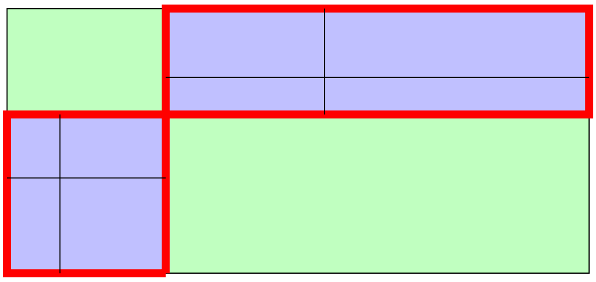
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. megoldás. Ha egy téglalapot négy téglalapra osztunk az ábra szerint, akkor két átellenes kerületeinek összege megegyezik az eredeti téglalap kerületével, hiszen az ábrán jelölt mozgatásokkal a kis téglalapok oldalaiból megkaphatjuk az eredeti téglalap oldalait.



Mivel ez a másik két átellenes téglalapra is igaz, így ha mind a négy kis téglalap kerületét összegezzük, akkor az eredeti téglalap kerületének kétszeresét kapjuk.

Az alábbi ábrán látható nyolc kis kék téglalap kerületének összege tehát éppen kétszer akkora, mint a piros kerettel jelzett két téglalap kerületeinek összege, ami az előző állításunk szerint az eredeti téglalap kerületével egyezik meg. Hozzávéve a két zöld téglalap kerületének összegét, ami szintén az eredeti téglalap kerületével egyezik meg, azt kapjuk, hogy a tíz kis téglalap kerületeinek összege az eredeti téglalap kerületének éppen háromszorosa.



Ebből következően **az eredeti téglalap kerülete 2 egység**.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Bergengóciában a következő pénzérmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4 × 4-es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	**23**		**95**
31				
32				
66				
27				

1 2

5 10

20 50

Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke.
Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.
A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

Megoldás. Az érmék ábrán látható elhelyezése esetén teljesülnek a feladatban megadott feltételek:

	18	**23**		**95**
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Hogyan lehet megtalálni a megoldást?

A következőkben adunk egy módszert a fenti helyes elhelyezés megtalálására, és közben belátjuk azt is, hogy **nincs más helyes elhelyezés.**
Ha soronként összeadjuk az értékeket, akkor megkapjuk, hogy a táblázatban összesen

$$31 + 32 + 66 + 27 = 156 \text{ peták van.}$$

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: **kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu**
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

	18	23		95
31			5	
32			5	
66			5	
27			5	

Ha ebből kivonjuk az első, második és negyedik oszlopban található petákok összegét, akkor megkapjuk, hogy $156 - 18 - 23 - 95 = 20$ peták van a harmadik oszlopban. Ez a 20 peták csak úgy jöhet ki 4 érméből, hogy mind a 4 mezőbe 5 petákosat teszünk.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan jöhetnek ki az összegek az egyes sorokban.

	18	23		95
31			5	
32			5	
66			5	
27	1	1	5	20

Az első sorban csak úgy lehet a három hiányzó mező értéke 26, ha a $20, 5, 1$ számok szerepelnek valamilyen sorrendben.

A második sorban a 27 csak a $20, 5, 2$ számok esetén lehet az összeg, míg a harmadik sorban 61-et csak $50 + 10 + 1$ összegként kaphatjuk.

A negyedik sorban a 22 kijöhet $20+1+1$ és $10+10+2$ alakban is, ám a negyedik oszlopban a 95 csak úgy jöhet ki, hogy $50+20+20+5$, vagyis a jobb alsó sarokba csak 20-as kerülhet. Ebből pedig következik, hogy az alsó sor maradék két mezőjén két darab egyes szerepel.

	18	23		95
31	5		5	
32	2		5	
66	10		5	
27	1	1	5	20

Az első oszlopban a hiányzó 3 mező összege 17, ami csak $10 + 5 + 2$ alakban állhat elő, amiből az előző bekezdés alapján a 10-es csak a harmadik sorban lehet, a 2-es pedig a második sorban, így a bal felső sarokban csak 5-ös érme lehet.

	18	23		95
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Ekkor a jobb oszlop első sorában csak 20-as lehet, a második sorban csak az 5-ös, míg a harmadik sorban csak az 50-es.
Ezek után egyértelműen kitölthető a második oszlop is.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap

NEMZETI KULTURÁLIS TÁMOGATÁSKEZELŐ