



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2024. március 22.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Hullámvázónak nevezünk egy pozitív egész számot, ha a tízesekre és ezresekre kerekített értéke is kisebb a számnál, de a százásokra kerekített értéke nagyobb a számnál.

(a) Melyik a legkisebb hullámvázó négyjegyű szám?

(b) Hány hullámvázó négyjegyű szám van?

Megoldás. Egy hullámvázó szám utolsó, egyes helyiértéken álló számjegye 1, 2, 3 vagy 4 lehet, mert ekkor lesz a tízesekre kerekített érték kisebb a számnál. (Nem lehet 0, mivel akkor a tízesekre kerekített szám egyenlő lenne az eredetivel.)

A tízes helyiértéken álló számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9 lehet, mert ekkor lesz a százásokra kerekített érték nagyobb a számnál.

A százasként helyiértéken álló számjegy 0, 1, 2, 3 vagy 4 lehet, mert ekkor lesz az ezresekre kerekített érték kisebb a számnál. (Itt lehet 0 számjegy, mert ha az egyesek helyén nem 0 van, akkor az ezresre kerekített érték ebben az esetben is kisebb lesz.)

A szám első számjegye bármely nem 0 számjegy lehet.

(a) A fenti lehetőségek közül minden esetben a lehető legkisebbet választva azt kapjuk, hogy **1051 a legkisebb négyjegyű hullámvázó szám.**

(b) A különböző helyiértékeken a számjegyeket egymástól függetlenül választhatjuk meg, így $9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 900$ **hullámvázó négyjegyű szám van.**

2. Egy csapatversenyen négy fős csapatok vettek részt. Az egyik csapatban Ági, Bori, Cili és Dóra azt a stratégiát folytatták, hogy minden feladatnak volt egy megoldója, a másik három gyerek pedig ellenőrizte a megoldást. Bori mindenki másnál többször, összesen nyolcszor ellenőrzött feladatot. Dóra viszont csak ötször – mindenki más ennél többször.

Ki hány feladatot oldott meg?

Megoldás. A feltételek alapján megállapíthatjuk, hogy Ági és Cili legalább 6 és legfeljebb 7 feladatot ellenőrizhetett.

Mivel minden feladatot 3 ember ellenőrzött, ezért az ellenőrzések számának az összege osztható 3-mal.



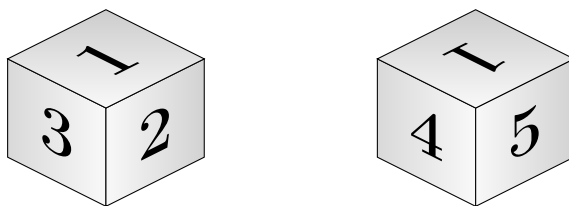


Bori és Dóra összesen 13 ellenőrzést végzett el közösen. A fenti becslés alapján Ági és Cili pedig legalább 12-t és legfeljebb 14-et. Tehát a négyük által összesen elvégzett ellenőrzések száma legalább 25 és legfeljebb 27. Ebben a tartományban a 27 az egyetlen hárommal osztható szám, vagyis összesen 27 ellenőrzést végeztek el.

Mivel minden feladathoz 3 ellenőrzés tartozik, így az általuk megoldott feladatok száma 9.

Mivel Bori 8, Dóra 5, Ági és Cili pedig 7-7 megoldást ellenőrzött, míg a megoldott és az ellenőrzött feladatok száma minden lány esetében 9, ezért **Bori 1, Dóra 4, Ági és Cili pedig 2-2 feladatot oldott meg.**

3. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



Megoldás. Számoljuk össze, hány olyan dobókocka létezik, amelyen az **1** szám zölddel lett megfestve. Nyilvánvalóan ugyanennyi olyan lesz, amelyen az **1** kék, illetve szintén ennyi, ahol sárga.

Ha az **1** zöld, akkor a **2**, **3**, **4**, **5** nem lehetnek zöldek. Lehet a **2** kék, de ekkor már biztos, hogy a **3** és **4** sárga, emiatt az **5** kék, viszont így a **6**-os már csak zöld lehet. Ha viszont a **2** sárga, akkor hasonlóan megállapítható, hogy a **3** és **4** kék, az **5** sárga, a **6** pedig zöld.

Mivel más nem lehetséges, csak két olyan kocka van, ahol **1** zöld, tehát összesen $3 \cdot 2 = 6$ -féle különböző dobókockát gyártanak.

2. megoldás A kocka két oldala csak akkor nem szomszédos, ha átellenes. Tehát két szám csak akkor lehet azonos színű, ha átellenes oldalon állnak. Tehát bármely színre igaz, hogy legfeljebb két olyan színű szám lehet a kockán. Így hat oldalt csak úgy tudunk kiszínezni három színnel, ha a szemközti párok mindig azonos színűek.

A dobókocka számai feloszthatók három átellenes párra: **1** és **6**; **2** és **5**; **3** és **4**. Ha a különböző párok különböző színűek, akkor a kocka teljesíti a feltételeket.

Már csak az a kérdés, hogy hányféleképpen oszthatjuk ki a színeket a három átellenes oldalpár között. Tehát $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle különböző kockát gyártanak.





**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

4. Bergengóciában a következő pénzürmék vannak forgalomban: 1, 2, 5, 10, 20 és 50 peták. Sára az ábrán látható 4×4 -es táblázat minden mezőjére elhelyezett pontosan egy érmét.

	18	23	95		
31					
32					
66					
27					

Ezután néhány sorhoz és oszlophoz odaírta, hogy mennyi az ottani érmék összértéke.

Mutass példát arra, hogy miként helyezhette el Sára az érméket.

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyes elhelyezés megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes elrendezés megtalálását.

Megoldás. Az érmék ábrán látható elhelyezése esetén teljesülnek a feladatban megadott feltételek:

	18	23	95	
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Hogyan lehet megtalálni a megoldást?

A következőkben adunk egy módszert a fenti helyes elhelyezés megtalálására, és közben belátjuk azt is, hogy **nincs más helyes elhelyezés**.

Ha soronként összeadjuk az értékeket, akkor megkapjuk, hogy a táblázatban összesen

$$31 + 32 + 66 + 27 = 156 \text{ peták van.}$$

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



Ha ebből kivonjuk az első, második és negyedik oszlopban található petákok összegét, akkor megkapjuk, hogy $156 - 18 - 23 - 95 = 20$ peták van a harmadik oszlopban. Ez a 20 peták csak úgy jöhet ki 4 érméből, hogy mind a 4 mezőbe 5 petákost teszünk.

Ezek után nézzük meg, hogy hogyan jöhetnek ki az összegek az egyes sorokban.

	18	23		95
31			5	
32			5	
66			5	
27	1	1	5	20

Az első sorban csak úgy lehet a három hiányzó mező értéke 26, ha a 20, 5, 1 számok szerepelnek valamilyen sorrendben.

A második sorban a 27 csak a 20, 5, 2 számok esetén lehet az összeg, míg a harmadik sorban 61-et csak $50 + 10 + 1$ összegként kaphatjuk.

A negyedik sorban a 22 kijöhet $20 + 1 + 1$ és $10 + 10 + 2$ alakban is, ám a negyedik oszlopban a 95 csak úgy jöhet ki, hogy $50 + 20 + 20 + 5$, vagyis a jobb alsó sarokba csak 20-as kerülhet. Ebből pedig következik, hogy az alsó sor maradék két mezőjén két darab egyes szerepel.

Az első oszlopban a hiányzó 3 mező összege 17, ami csak $10 + 5 + 2$ alakban állhat elő, amiből az előző bekezdés alapján a 10-es csak a harmadik sorban lehet, a 2-es pedig a második sorban, így a bal felső sarokban csak 5-ös érme lehet.

	18	23		95
31	5	1	5	20
32	2	20	5	5
66	10	1	5	50
27	1	1	5	20

Ekkor a jobb oszlop első sorában csak 20-as lehet, a második sorban csak az 5-ös, míg a harmadik sorban csak az 50-es.

Ezek után egyértelműen kitölthető a második oszlop is.

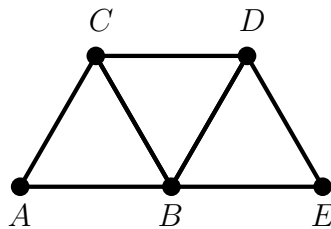
	18	23		95
31			5	
32			5	
66			5	
27			5	

	18	23		95
31	5		5	
32	2		5	
66	10		5	
27	1	1	5	20



5. Panna rajzolt 5 különböző pontot egy papírlapra. A 10 pontpár közül legfeljebb hánynak a távolsága lehet pontosan 4 cm?

Megoldás. Az ábrán látható módon megadható 5 pont úgy, hogy a közöttük fellépő távolságok közül 7 távolság is 4 cm legyen. A megrajzolt szakaszok hossza 4 cm (vagyis ABC , BCD és BDE szabályos háromszögek).



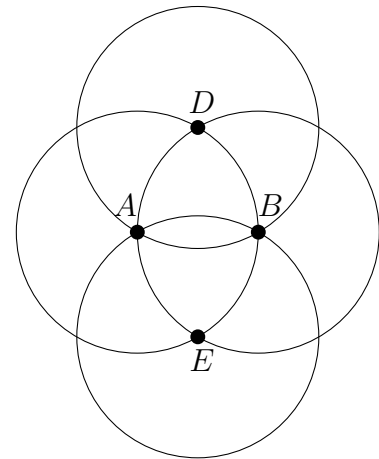
A következőkben bebizonyítjuk, hogy 7-nél több távolság nem lehet egyenlő.

Tegyük fel, hogy el lehet helyezni 5 pontot úgy, hogy 8 távolság is egyenlő legyen. Ez azt jelenti, hogy a 10 távolság közül legfeljebb 2 olyan van, ami nem 4 cm. Ez kétféleképpen lehetséges azt tekintve, hogy a legfeljebb két nem 4 cm hosszúságú szakasznak legfeljebb 3 vagy pontosan 4 végpontja van.

1. eset: a két szakasznak csak 3 végpontja van.

Ez azt jelenti, hogy az 5 pont között van 2 olyan, amelyektől az összes többi pont 4 cm távolságra van. Legyen az egyik pont A , a másik pedig B . Ez azt jelenti, hogy a maradék 3 pont rajta van az A és a B körüli 4 cm sugarú körön is.

Ez a két kör nem esik egybe, hiszen a középpontjaik távolsága is 4 cm. Ekkor azonban a két körnek pontosan 2 metszéspontja van, vagyis nem lehet a maradék három pont mindegyike mindkét körön rajta.



2. eset: a két szakasznak 4 végpontja van.

Ekkor az ötödik ponttól (A) mind a négy pont 4 cm távolságra van. Vagyis a 4 pont egy A középpontú körön helyezkedik el.

Legyen a két nem 4 cm hosszúságú szakasz BC és DE . Vagyis BD és BE is 4 cm hosszúságú, vagyis D és E rajta vannak a B körüli 4 cm sugarú körön. Vagyis D és E az A , illetve a B pont körüli 4 cm sugarú körök metszéspontja.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy C -nek rajta kell lennie az D és E középpontú, 4 cm sugarú körön is, de ennek a két körnek a metszéspontja A és B , amikkel nem eshet egybe C .

Összefoglalva: a 10 pontpár közül **legfeljebb 7-nek a távolsága lehet pontosan 4 cm.**

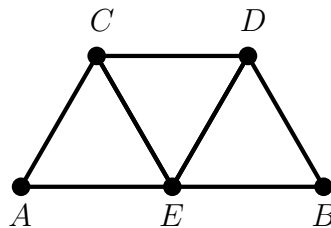


2. megoldás. Válasszunk ki Panna pontjai közül kettőt tetszőlegesen. Mivel legfeljebb két olyan pont van a síkon, amely mindkét kiválasztott ponttól 4 cm távolságra van (a megfelelő körök metszéspontjai), Panna további három pontja közül legalább egynek nem 4 cm a távolsága a kiválasztott pontok valamelyikétől.

Legyen most Panna pontjai közül A és B távolsága nem 4 cm. Ekkor az előző gondolatmenettel a többi három közül valamelyiknek a távolsága A -tól vagy B -től nem 4 cm. Legyen ez a pont C . Ha Panna fennmaradó két pontja D és E , akkor ezekre is alkalmazva az előző gondolatmenetet azt kapjuk, hogy valamelyik pont távolsága D -től vagy E -től nem 4 cm. Így biztosan van három különböző pontpár, amelyek távolsága nem 4 cm: 1. AB , 2. AC vagy BC , 3. egy D -t vagy E -t tartalmazó pontpár.

Tehát a 10 pontpár közül legfeljebb 7-nek lehet a távolsága pontosan 4 cm.

Ez meg is valósítható, például így:



Az ábrán AEC , ECD és BDE 4 cm oldalú szabályos háromszögek.

