



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2024. március 22.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Quadrata hercegnő készített egy bővös négyzetet (azaz egy olyan, különböző számokkal kitöltött 3×3 -as táblázatot, amelyben ugyanannyit kapunk eredményül, akármelyik sorban, oszlopban vagy átlóban adjuk össze a benne szereplő három számot).

Az elkészült bővös négyzetben két számot felcserélt, így kapta az ábrán látható táblázatot.

Meg lehet-e egyértelműen állapítani, hogy melyik két számot cserélte fel Quadrata hercegnő?

17	11	23
20	14	8
5	26	2

Megoldás. Egyértelműen meg lehet állapítani, melyik két számot cserélte ki Quadrata. Számítsuk ki a módosított táblázatban a sorok és oszlopok összegét (az átlókra nem lesz szükségünk).

17	11	23	51
20	14	8	42
5	26	2	33
42	51	33	

Amikor Quadrata megcserélte a számokat, akkor a csere által érintett egyik mezőbe az eddiginél nagyobb szám került, tehát ennek a mezőnek a sorában és oszlopában is megnőtt az összeg. A csere által érintett másik mezőbe egy az eddiginél kisebb szám került, tehát ennek a mezőnek a sorában és oszlopában is csökkent az összeg. A harmadik sor és oszlop összege változatlan maradt.

Tehát a csere által megnövelt értékű mezőnek a módosult táblázat legnagyobb összegű sorában és oszlopában kell lennie, ez a felső középső mező, amelyen a csere után a 11 áll. Hasonlóképpen, a csere által lecsökkent értékű mezőnek a módosult táblázat legkisebb összegű sorában és oszlopában kell lennie, ez a jobb alsó mező, amelyen a csere után a 2 áll.

Tehát egyértelműen megállapítható, hogy a 2 és a 11 cseréjével jött létre a feladatban megadott táblázat.





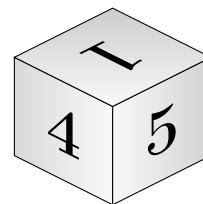
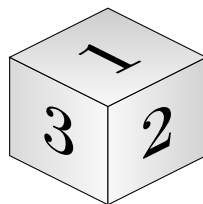
Megjegyzés az 1. feladat megoldásához.

A 2 és 11 számokat visszacserélve valóban bővös négyzetet kapunk, hiszen így mind a nyolc vizsgált összeg 42.

Ennek ellenőrzése nélkül is teljes egy megoldás, hiszen a feladat szövege implikálja, hogy létezett egy bővös négyzet, tehát legalább egy működő cserének kell lennie.

17	2	23	42
20	14	8	42
5	26	11	42
42	42	42	42

2. Bergengócia játékgyárában csak olyan, 1-től 6-ig számozott dobókockát gyártanak, melyeken a számok elrendezése megegyezik a képen láthatóval (itt ugyanazt a kockát két irányból látjuk). Abban viszont különbözhetnek, hogy a számokat milyen színnel festik rá a kockára. Minden szám vagy zöld, vagy kék, vagy sárga, viszont két szomszédos lapra írt szám nem lehet azonos színű. Hányféle különböző dobókockát készíthetnek ebben a gyárban?



Megoldás. Számoljuk össze, hány olyan dobókocka létezik, amelyen az $\boxed{1}$ szám zölddel lett megfestve. Nyilvánvalóan ugyanennyi olyan lesz, amelyen az $\boxed{1}$ kék, illetve szintén ennyi, ahol sárga.

Ha az $\boxed{1}$ zöld, akkor a $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ nem lehetnek zöldek. Lehet a $\boxed{2}$ kék, de ekkor már biztos, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ sárga, emiatt az $\boxed{5}$ kék, viszont így a $\boxed{6}$ -os már csak zöld lehet. Ha viszont a $\boxed{2}$ sárga, akkor hasonlóan megállapítható, hogy a $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$ kék, az $\boxed{5}$ sárga, a $\boxed{6}$ pedig zöld.

Mivel más nem lehetséges, csak két olyan kocka van, ahol $\boxed{1}$ zöld, tehát összesen $3 \cdot 2 = 6$ -féle különböző dobókockát gyártanak.

2. megoldás A kocka két oldala csak akkor nem szomszédos, ha átellenes. Tehát két szám csak akkor lehet azonos színű, ha átellenes oldalon állnak. Tehát bármely színre igaz, hogy legfeljebb két olyan színű szám lehet a kockán. Így hat oldalt csak úgy tudunk kiszínezni három színnel, ha a szemközti párok mindig azonos színűek.

A dobókocka számai feloszthatók három átellenes párra: $\boxed{1}$ és $\boxed{6}$; $\boxed{2}$ és $\boxed{5}$; $\boxed{3}$ és $\boxed{4}$. Ha a különböző párok különböző színűek, akkor a kocka teljesíti a feltételeket.

Már csak az a kérdés, hogy hányféleképpen oszthatjuk ki a színeket a három átellenes oldalpár között. Tehát $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle különböző kockát gyártanak.





**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

3. Az első napon délben felírtuk egy táblára: 1, 2. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: 1, 3; a harmadik estén 2, 4 és így tovább.

Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

Megoldás. Írjuk fel az első néhány számpárt:

1, 2 || 1, 3 || 2, 4 || 2, 6 || 4, 8 || 4, 12 || 8, 16 || 8, 24 || 16, 32 || 16, 46 || 32, 64 || ...

A (2, 4) és (32, 64) párban a kisebbik számok utolsó számjegye is megegyezik, és a nagyobbik számok utolsó számjegye is.

Az utolsó számjegyek azonban meghatározzák a következő különbség és összeg utolsó számjegyeit is, vagyis innentől kezdve ugyanazok az utolsó számjegyek fognak következni, amiket eddig kaptunk. (Például a következő számpár a (32, 96), amiknek ugyanazok az utolsó számjegyei mint a (2, 6) számpárnak.)

Mivel eddig nem fordult elő 0 az egyesek helyiértékén, így **soha nem is fog előfordulni**.

Megjegyzés az első megoldáshoz. Az utolsó számjegyet vizsgáló megoldásoknál fontos, hogy odafigyeljünk a két szám sorrendjére – csak ezzel együtt határozzák meg egyértelműen a következő pár utolsó jegyeit. Ugyanis például a (2, 6) pár után a (4, 8) következik, míg a (16, 32) pár után – ahol szintén 2 és 6 az utolsó számjegy – a (16, 46) pár jön.

2. megoldás. Az első néhány napon a táblára kerülő számokat vizsgálva észrevehető, hogy

- minden második este két szomszédos kettőhatvány;
- a köztes napokon este pedig egy kettőhatvány és ennek háromszorosa szerepel a táblán.

Egyrészt, ez az első néhány este láthatóan teljesül (páratlanodik napokon lesz két kettőhatvány).

Másrészt, ha egy este teljesül a szabály, akkor ez öröklődik a következő estére is, hiszen:

- Ha egy páratlanodik este a táblán álló két szomszédos kettőhatvány x és $2x$, akkor ezek különbsége $2x - x = x$, összegük pedig $x + 2x = 3x$. Tehát másnap (párosodik napon) este is teljesülni fog a szabály.
- Ha egy párosodik este a táblán álló kettőhatvány x , akkor háromszorosa $3x$. Ezek különbsége $3x - x = 2x$ is kettőhatvány, összegük pedig $x + 3x = 4x$, az előbbi kettőhatvány kétszerese. Tehát másnap (párosodik napon) este is teljesülni fog a szabály.

A 0-ra végződő számok biztosan oszthatók 10-zel, de a kettőhatványok és ezek háromszorosai nem oszthatók 10-zel (mivel nincs bennük 5-ös prímtényező).

Ezért **soha nem fog 0-ra végződő szám szerepelni a táblán**.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



**NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ**



4. Piroska és Bertalan azon gondolkodik, hogy az

$$\frac{1}{2024}, \frac{2}{2024}, \frac{3}{2024}, \dots, \frac{2023}{2024}$$

törtek közt hány olyan van, amely nem egyszerűsíthető. Piroska szerint páros sok, Bertalan szerint páratlan sok ilyen tört van. Melyiküknek van igaza?

Megoldás. Legyen n pozitív egész, amelyre $1 \leq n \leq 1011$. Ekkor tekintsük a $t_1 = \frac{n}{2024}$ és a $t_2 = \frac{2024-n}{2024}$ törtet. Ha t_1 egyszerűsíthető, akkor az azt jelenti, hogy van olyan $d_1 > 1$ egész, amely közös osztója n -nek és 2024-nek. Ekkor azonban ez a d_1 osztja $(2024-n)$ -et is, hiszen a kisebbítendőt és a kivonandót is osztja. Ebből következik, hogy t_2 egyszerűsíthető d_1 -gyel.

Ez fordítva is igaz, ha t_2 egyszerűsíthető, akkor $(2024-n)$ -nek és 2024-nek van egy $d_2 > 1$ közös osztója. Ez a d_2 akkor osztója a két szám különbségének is, azaz $2024 - (2024-n) = n$ -nek is.

Tehát a számok párokba állíthatók úgy, hogy bármely szám párja ugyanúgy viselkedik egyszerűsítés szempontjából, mint a szám maga. Egyedül a $\frac{1012}{2024}$ -nek lesz a párja önmaga, de ez a szám egyszerűsíthető. Vagyis **Piroskának van igaza, a nem egyszerűsíthető törtek száma páros.**

2. megoldás. Az egyszerűsíthető törtek pontos száma is meghatározható a logikai szita módszerével. Azok a törtek egyszerűsíthetők, amelyek számlálójának van 1-nél nagyobb közös osztója a 2024-gyel (számlálójuk nem relatív prím 2024-hez). 2024 pímtényezői felbontása $2^3 \cdot 11 \cdot 23$, így az $1, 2, \dots, 2023$ számok között

- $[2023/2] = 1011$ db 2-vel osztható (páros)¹;
- $[2023/11] = 183$ db 11-gyel osztható;
- $[2023/23] = 87$ db 23-gyel osztható.

Az ilyen számlálójú törtek lesznek egyszerűsíthetők, de ez még nem jelenti azt, hogy $1011 + 183 + 87$ egyszerűsíthető tört, mivel többször számoltuk azokat, amelyek

- 2-vel és 11-gyel is, azaz 22-vel oszthatók, ilyenből $[2023/22] = 91$ db van;
- 2-vel és 23-mal is, azaz 46-tal oszthatók, ilyenből $[2023/46] = 43$ db van;
- 11-gyel és 23-mal, azaz 253-tal oszthatók, ilyenből $[2023/253] = 7$ db van.

De az $(1011 + 183 + 87) - (91 + 43 + 7) = 1140$ sem adja meg az egyszerűsíthető törtek számát, hiszen azokat a számokat, amelyek 2-vel, 11-gyel és 23-mal is – ezek éppen a $2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$ -tal osztható számok, így $[2023/506] = 3$ db van belőlük –, azokat 3-szor megszámláltuk, majd 3-szor levontuk. Így ezeket még egyszer hozzá kell számolnunk a végén, tehát összesen

$$(1011 + 183 + 87) - (91 + 43 + 7) + 3 = 1143 \text{ egyszerűsíthető van a törtek között.}$$

Így a nem egyszerűsíthető törtek száma $2023 - 1143 = 880$, tehát páros, azaz **Piroskának van igaza.**

¹Az $[x]$ jelöléssel a számok egészrészét – egészre, lefele kerekített értékét – jelöljük.





**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

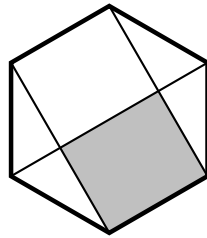
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

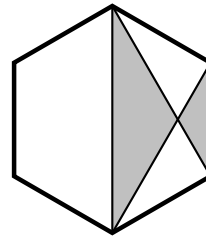
Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos hatszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik hatszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?



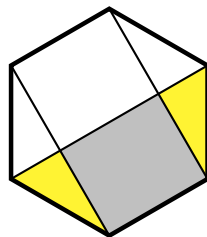
A



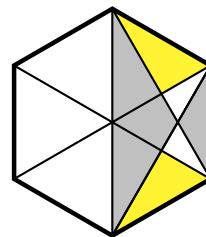
B

Megoldás. Az A_1 ábrán két kis háromszöget sárgára színezttem.

A B_1 ábrán a másik két főátló behúzása után színezttem sárgára két háromszöget.



A_1



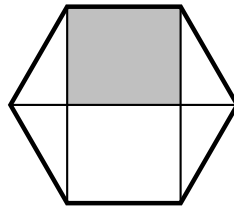
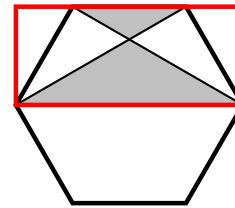
B_1

A négy sárgára színezett háromszög közül bármely kettő egybevágó. Így az A_1 ábrán a sárgára és a szürkére színezett rész területe pontosan a hatszög fele, míg a B_1 ábrán kevesebb, mint a fele lett.

Az egyenlő területű sárga részek levonása után azt kapjuk, hogy **az A hatszögben színeztünk nagyobb területrészt szürkére.**



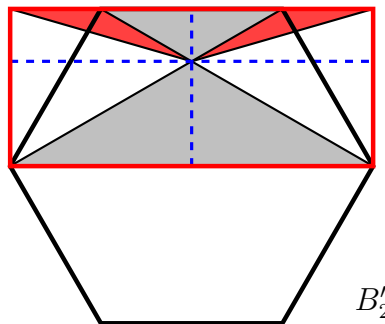
2. megoldás A könnyebb átláthatóság kedvéért forgassuk el a két hatszöget úgy, hogy a behúzott főátló vízszintes legyen, és a szürke terület a főátló felett helyezkedjen el.


 A_2

 B_2

Közismert, hogy egy szabályos hatszög főátlója kétszer olyan hosszú, mint az oldala. Ezért a B_2 ábrára pirossal berajzolt téglalap területe éppen kétszerese az A_2 ábrára berajzolt téglalapnak, hiszen előbbi szélessége éppen kétszer akkora, míg a magasságuk megegyezik.

A B_2 ábrán a piros hatszög területének kevesebb, mint a fele van szürkére színezve.

Ennek belátáshoz, színezzünk pirosra még két háromszöget a B'_2 ábrán látható módon.


 B'_2

A kék szaggatott vonalak négy olyan téglalapra vágják szét a piros téglalapot, melyek mindegyikére igaz, hogy a területének pont a fele van beszínezve.

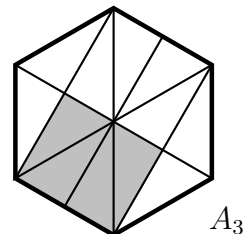
Következésképpen, az A ábrán színeztünk nagyobb területet szürkére.



Megjegyzések a megoldáshoz.

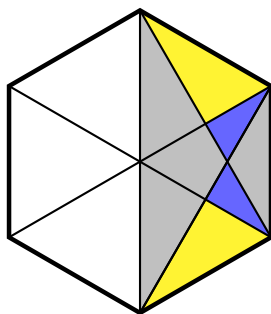
Az A ábrán a hatszög területének pontosan $1/3$ része szürke.

Ez többféleképpen belátható. Például, ha az A_3 ábrán látható módon behúzzuk az összes főátlót és még egy szemközti oldalpár felezőmerőlegesét, akkor 12 egybevágó háromszögre bontjuk a hatszöget, melyek közül 4 szürke.

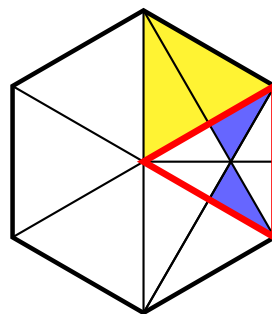


A B ábrán a hatszög területének $5/18$ része szürke.

Ez is többféleképpen indokolható, egy példát mutatunk. A korábban már vizsgált B_1 ábrán színezzük kékre a hatszög jobb oldali feléből még hiányzó két kis háromszöget, így kapjuk a B_3 ábrát, amelyen összesen a hatszög területének fele van kiszínezve.



B_3



B_4

A B_4 ábrán pirossal keretezett szabályos háromszög területe a hatszögnek $1/6$ -a, ennek a két kék háromszög együtt $1/3$ -a – ez például abból következik, hogy a harmadik szimmetriatengelyét is behúzva 6 egybevágó darabra vágjuk szét a pirossal keretezett háromszöget, melyek közül 2 kék.

Így a két kék háromszög együtt a hatszög területének $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ része.

A két sárga együtt $1/6$ rész (hiszen egymás mellé téve a pirossal keretezett háromszöggel egybevágó háromszöget alkotnak).

Így a B ábrán szürkére színezett rész területe a hatszögnek:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18} \text{ része.}$$

