



**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

53. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2024. március 22.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Néhány testvér (akik közt nincsenek ikrek) elment almát szedni, mindegyikük a saját kosarába szedett almát. A legidősebb éppen kétszer annyi almát szedett, mint ahányat a legfiatalabb. Hazafelé úton mindegyikük (a legfiatalabbat leszámítva) adott egy-egy almát az összes nála fiatalabb testvérének. Így, mire hazaértek, minden testvér kosarában ugyanannyi alma volt. Hányan lehettek a testvérek, ha a második legidősebb 26 almát szedett?

Megoldás. Legyen a testvérek száma N . Ez azt jelenti, hogy a legidősebbnek $N - 1$ -gyel kevesebb alma volt a kosarában mire hazaért, a legfiatalabbnak pedig $N - 1$ -gyel több. Mivel ez a két szám megegyezik, ezért ez azt jelenti, hogy a legidősebb testvér $2N - 2$ almával szedett többet, mint a legfiatalabb.

Ez a különbség azonban épp a legfiatalabb által szedett almák száma, hiszen a legidősebb kétszer annyit szedett, mint a legfiatalabb. Vagyis a legfiatalabb $2N - 2$ darab almát szedett.

A legidősebb ennek kétszeresét, vagyis $4N - 4$ -et.

A második legidősebb kettővel szedett kevesebbet, mint a legidősebb, hiszen miután mindketten adtak a náluk fiatalabb testvéreiknek, a legidősebb adott neki egyet, így lett nekik egyenlő számú almájuk. Vagyis a második legidősebb $4N - 6$ almát szedett.

Ha $4N - 6 = 26$, akkor $4N = 32$, vagyis $N = 8$. Tehát **8 testvér ment el almát szedni.**

Ezek alapján a 8 testvér kor szerint növekvő sorrendben 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28 almát szedett. Mire hazaértek mindenkinek a kosarában 21 alma volt.





**TIT - Kalmár László
Matematikaverseny**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2. Az első napon délben felírtuk egy táblára: 1, 2. Ezután minden délben a következőt csináljuk: letöröljük a két táblán levő számot, és helyettük felírjuk a különbségüket (a nagyobból vonjuk ki a kisebbet) és az összegüket. Így például a második estén ez áll a táblán: 1, 3; a harmadik estén 2, 4 és így tovább.

Szerepelhet-e a táblán valaha 0-ra végződő szám?

Megoldás. Írjuk fel az első néhány számpárt:

1, 2 || 1, 3 || 2, 4 || 2, 6 || 4, 8 || 4, 12 || 8, 16 || 8, 24 || 16, 32 || 16, 46 || 32, 64 || ...

A (2, 4) és (32, 64) párban a kisebbik számok utolsó számjegye is megegyezik, és a nagyobbik számok utolsó számjegye is.

Az utolsó számjegyek azonban meghatározzák a következő különbség és összeg utolsó számjegyeit is, vagyis innentől kezdve ugyanazok az utolsó számjegyek fognak következni, amiket eddig kaptunk. (Például a következő számpár a (32, 96), amiknek ugyanazok az utolsó számjegyei mint a (2, 6) számpárnak.)

Mivel eddig nem fordult elő 0 az egyesek helyiértékén, így **soha nem is fog előfordulni**.

Megjegyzés az első megoldáshoz. Az utolsó számjegyet vizsgáló megoldásoknál fontos, hogy odafigyeljünk a két szám sorrendjére – csak ezzel együtt határozzák meg egyértelműen a következő pár utolsó jegyeit. Ugyanis például a (2, 6) pár után a (4, 8) következik, míg a (16, 32) pár után – ahol szintén 2 és 6 az utolsó számjegy – a (16, 46) pár jön.

2. megoldás. Az első néhány napon a táblára kerülő számokat vizsgálva észrevehető, hogy

- minden második este két szomszédos kettőhatvány;
- a köztes napokon este pedig egy kettőhatvány és ennek háromszorosa szerepel a táblán.

Egyrészt, ez az első néhány este láthatóan teljesül (páratlanodik napokon lesz két kettőhatvány).

Másrészt, ha egy este teljesül a szabály, akkor ez öröklődik a következő estére is, hiszen:

- Ha egy páratlanodik este a táblán álló két szomszédos kettőhatvány x és $2x$, akkor ezek különbsége $2x - x = x$, összegük pedig $x + 2x = 3x$. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.
- Ha egy párosadik este a táblán álló kettőhatvány x , akkor háromszorosa $3x$. Ezek különbsége $3x - x = 2x$ is kettőhatvány, összegük pedig $x + 3x = 4x$, az előbbi kettőhatvány kétszerese. Tehát másnap (párosadik napon) este is teljesülni fog a szabály.

A 0-ra végződő számok biztosan oszthatók 10-zel, de a kettőhatványok és ezek háromszorosai nem oszthatók 10-zel (mivel nincs bennük 5-ös prímtényező).

Ezért **soha nem fog 0-ra végződő szám szerepelni a táblán**.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



**NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ**



3. Luca egy papírra növekvő sorrendben felírta azokat a háromjegyű számokat, melyeknek számjegyei különbözőek és csökkenő sorrendben állnak. Majd a papír hátoldalára az ugyanilyen tulajdonságú négyjegyű számokat sorolta fel, szintén növekvő sorrendben.

(a) Melyik szám szerepel a háromjegyűek között a hetedik helyen?

(b) Hányadik helyen szerepel a négyjegyűek között a 8642?

Megoldás. (a) A háromjegyű számok közül az első hét növekvő sorrendben a következő:

210, 310, 320, 321, 410, 420, 421.

Tehát a hetedik szám Luca lapjának első oldalán a 421.

(b) Vegyük észre, hogy ha adott négy különböző számjegy, akkor ez meghatároz pontosan egy számot, mégpedig azt, amelyben az adott jegyek csökkenő sorrendben követik egymást.

Nézzük meg először, hogy hány olyan szám van a lapon, amely kisebb, mint 8000. Ebben csak a 0, 1, 2, ..., 7 számjegyeket lehet felhasználni. Tehát annyi ilyen szám van a lapon, ahányféleképpen a 8 számjegyből kiválaszthatunk 4-et. Ezek száma:

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70.$$

Nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8000 \leq N < 8600$. Ezeknek az első számjegye biztosan 8-as, a maradék 3 helyre pedig a 0, 1, 2, ..., 5 számjegyek közül választhatunk. Tehát hat számjegy közül kell választanunk 3-at, vagyis az ilyen számok száma:

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

Most nézzük meg, hogy hány olyan N szám van a lapon, amelyre igaz, hogy $8600 \leq N < 8640$. Ezeknek az első két számjegye biztosan 8-as és 6, a maradék 2 helyre pedig a 0, 1, 2, 3 számjegyek közül választhatunk. Tehát négy számjegy közül kell választanunk 2-t, vagyis az ilyen számok száma:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

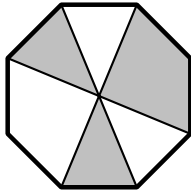
Végül nézzük meg, hogy hány olyan szám van a listán, amely legalább 8460, de kisebb, mint 8642. Ezek a 8640 és a 8641.

Összegezve: Luca lapjának hátoldalán $70 + 20 + 6 + 2 = 98$ olyan szám áll, amely kisebb, mint 8642.

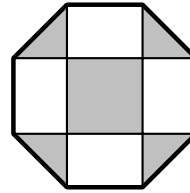
Tehát a keresett szám a 99. helyen szerepel a lap hátoldalán.



4. Az alábbi ábrákon két egybevágó szabályos nyolcszöget látsz, melyekben valamely átlók és oldalak mentén bizonyos részeket szürkére színeztünk. Melyik nyolcszögben színeztünk nagyobb területet szürkére?

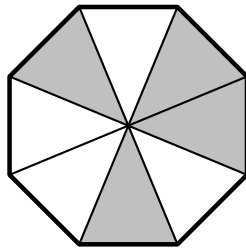


A

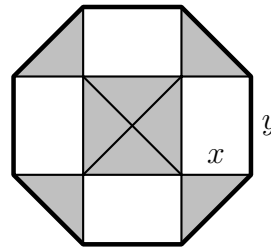


B

Megoldás. Az A ábrán a nyolc háromszög közül négy szürke, tehát a terület fele lett szürkére színezve. Ezt beláthatjuk például úgy, hogy a négy főátlója nyolc egybevágó, azaz egyenlő területű háromszögre („pizza-szeletre”) vágjuk a nyolcszöget. A nyolc háromszög közül négy, azaz valóban terület fele szürke



A



B

Az B ábrán rajzoljuk meg a középső szürke négyzet két átlóját. Így a középső négyzetet négy egybevágó, egyenlőszárú derékszögű háromszögre bontottuk. Ezek egybevágóak a nyolcszög kerületénél keletkező szürke háromszögekkel, hiszen az átfogójuk egyenlő a nyolcszög oldalával.

Tehát a szürke összterület egy ilyen szürke háromszög területének 8-szorosa. Két ilyen szürke háromszög az átfogójánál egy olyan négyzetet alkot, amelynek oldala x , átlója y (ahol y a nyolcszög oldalhosszúsága). A szürke részek összterülete így $4x^2$.

A fehérén maradó terület négy darab olyan téglalapból áll, amelyek oldalai x és y , tehát a szürke összterület: $4xy$.

Világos, hogy $x < y$, és így $4x^2 < 4xy$, azaz a B ábrán a szürke terület kevesebb, mint fehér. Tehát a B ábrán nyolcszög területének kevesebb, mint a fele szürke.

Azt kaptuk, hogy **az A ábrán színeztünk nagyobb területet szürkére.**

Megjegyzések a megoldáshoz.

Könnyen kiszámítható, hogy $y = \sqrt{2}x$, de az arány pontos értékére nincs szükségünk a megoldáshoz.

Ha a nyolcszög oldalát (a fenti megoldásban y -t) választjuk 1 egységnek, akkor a B ábrán a fehérén maradó téglalapok területe egyenként $\sqrt{2}/2$, a szürke egyenlőszárú derékszögű háromszögek területe egyenként $1/4$. Így a szürke terület aránya a B ábrán $\frac{2}{2\sqrt{2}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$.



5. Bergengócia játékgyárában csupa azonos méretű kiskockát gyártanak. A kiskockák mindegyik lapját pirosra vagy kékre festik, majd szétválogatva ládába pakolják őket. Az A jelű ládában lévő kiskockák 3 lapja piros és 3 lapja kék, a B jelű ládában lévőnek 4 lapja piros és 2 lapja kék, a C jelű ládában lévőnek 2 lapja piros és 4 lapja kék.

Ernő és Fanni egy-egy olyan $2 \times 2 \times 2$ -es nagy kockát szeretnének építeni, amelynek semelyik lapján sincs kétféle szín.

1. Ernő kivett 8 kiskockát az A jelű ládából. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni egy fenti tulajdonságú nagy kockát?
2. Fanni kivett összesen 8 kiskockát a B és C jelű ládákból. Igaz-e, hogy ezekből **biztosan** meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát?

Megoldás. (a) Ha egy kiskockának 3 piros és 3 kék lapja van, akkor van olyan csúcsa, amelyben 1 piros és 2 kék lap találkozik. Hiszen biztosan kell, hogy legyen két kék lap, amelyek élszomszédosak, nevezzük ezeket X és Y lapnak. Két olyan lap van, amely X -szel és Y -nal is szomszédos, ezek közül legalább az egyik piros (hiszen ha mindkettő kék lenne, akkor már négy kék lapja lenne a kockának).

Mindegyik kiskockán keressünk tehát egy olyan csúcsot, amelyben két kék és egy piros lap találkozik, és ezt a csúcsot színezzük zöldre. A kiskockákat úgy forgatva építsük össze, hogy mindig a zöld csúcsok essenek a $2 \times 2 \times 2$ -es kocka csúcsaiba, és a zöld csúcsban találkozó oldalak közül a vízszintesen álló lap piros legyen, míg a két függőlegesen álló lap kék. Így a kapott nagy kocka két vízszintes (alsó és felső) lapja teljesen piros lesz, míg a négy függőleges lapja teljesen kék.



Tehát **biztosan** meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát.

Megjegyzés az (a) részhez. Egy alternatív konstrukció vázlata: ha egy kiskockának három 3 piros és 3 kék lapja van, akkor van olyan csúcsa, amelyben 2 piros és 1 kék lap találkozik. Négy kiskockán keressünk egy ilyen csúcsot, és színezzük narancssárgára. A többi kiskockán pedig egy-egy zöld csúcsot rajzoljunk meg (ahol 2 kék és 1 piros lap találkozik). Ekkor az ábrákon látható módon össze lehet építeni belőlük egy olyan nagy kockát, amelynek 3 lapja teljesen kék és 3 lapja teljesen piros.





TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu, titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

(b) Egy kiskocka két átellenes lapja közül pontosan egy látható az összeépített $2 \times 2 \times 2$ -es kocka felületén.

Ha egy kiskockán 4 piros és 2 kék lap van úgy, hogy a 2 kék lap átellenes (nevezzük az ilyet P_0 típusú kockának), akkor ez biztosan 2 piros és 1 kék kisméretű lap járul hozzá a nagy kocka felületéhez.

Hasonlóképpen, ha egy kiskockán 4 kék és 2 piros lap van úgy, hogy a 2 piros lap átellenes (az ilyet nevezzük K_0 típusú kockának), akkor ez biztosan 2 kék és 1 piros kisméretű lap járul hozzá a nagy kocka felületéhez.

Ezért ha Fanni 5 darab P_0 típusú kiskockát vett ki a B jelű ládából és 3 darab K_0 típusú kiskockát a C jelű ládából, akkor összesen $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13$ piros kisméretű lap és $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 11$ kék kisméretű lap fogja alkotni a nagy kocka felületét. Így semmiképp nem lehet egyszínű a nagy kocka mindegyik lapja, hiszen a piros kisméretű lapok számának 4-gyel oszthatónak kellene lennie a felületen, mivel a nagy kocka mindegyik lapja 4 darab kisméretű lapból áll össze.

Tehát **nem biztos, hogy meg lehet építeni a fenti tulajdonságú nagy kockát.**

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03315. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ