TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2025. március 21.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Samu látott egy LEGO-t a boltban, ami nagyon tetszett neki. Elmesélte az anyukájának ezt, aki az ára iránt érdeklődött. Samu azt mondta neki, hogy ez a legkisebb pozitív egész szám, amely osztható 12-vel, de nem osztható 8-cal, viszont a számjegyeinek szorzata 8.
Mennyibe kerül a LEGO?

Megoldás. A számjegyek szorzata csak úgy lehet 8, ha az 1-es számjegyeken kívül van vagy egy 8-as vagy egy 2-es és egy 4-es, vagy pedig három darab 2-es.
Ha csak egy 8-as van, akkor a szám nem lehet osztható 12-vel, mivel a 8-asnak az egyesek helyére kell kerülnie, előtte pedig 1-esek lesznek, de 18-ra végződő szám nem lehet osztható 4-gyel, és így 12-vel sem.
Nézzük azt az esetet, hogy egy 2-es, egy 4-es és valahány 1-es számjegy van a számban.
Ha nincs a számban 1-es, akkor 24 vagy 42 lehet, de egyik sem felel meg a feltételeknek.
Mivel a szám osztható 12-vel, így 3-mal is, ezért a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 3-mal.
Ha egy vagy két darab 1-es van, akkor a számjegyek összege nem osztható 3-mal, ezért legalább három 1-es számjegy van a számban.
Ekkor a lehető legkisebb szám a 11124 és ez meg is felel a feladat feltételeinek.
Ha pedig három darab 2-es számjegy van benne az egyesek mellett, akkor a hárommal való oszthatóság miatt lehetne a 222, de ez nem osztható 4-gyel, ezután a következő lehetséges szám már hatjegyű lenne, így biztosan nagyobb az előbbi megoldásnál.
Így a LEGO ára 11124.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. Hány olyan 8-jegyű páratlan pozitív egész szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy különbsége 4? (A különbség úgy értendő, hogy a nagyobb számjegyből vonjuk ki a kisebbet.)

Megoldás. Mivel a szám utolsó jegye páratlan, a négyes különbségek miatt az összes számjegye páratlan lesz.
Ha szerepel a számban 3-as számjegy, akkor annak a szomszédai csak 7-esek lehetnek. Ugyanez fordítva is igaz: ha szerepel 7-es számjegy, akkor annak szomszédai csak 3-asok lehetnek. Tehát ezekben az esetekben más számjegy nem lehet a számban, ráadásul ezek a számjegyek is biztosan felváltva szerepelnek, így két lehetséges 8-jegyű szám jön szóba: 37373737, illetve 73737373.
Ha nem szerepel a számjegyek között se 3, se 7, akkor a számot az 1, 5, 9 számjegyek alkothatják. Vegyük észre, hogy akár 1-es, akár 9-es van valamelyik helyen, akkor annak mindkét szomszédja csak 5-ös lehet. Ugyanakkor az 5-ös mellett egyaránt állhat 1 vagy 9. Ezek alapján a keresett számok $\overline{x5x5x5x5}$ vagy $\overline{5x5x5x5x}$ alakban írhatók, ahol x helyére mindig egymástól függetlenül írhatunk 1-es vagy 9-es számjegyet.
Ez mindkét esetben $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ féle lehetőséget ad, tehát 3-ast nem tartalmazó megfelelő számból 32 darab van.
Összesen a feladat feltételeit 34 különböző 8-jegyű szám teljesíti.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

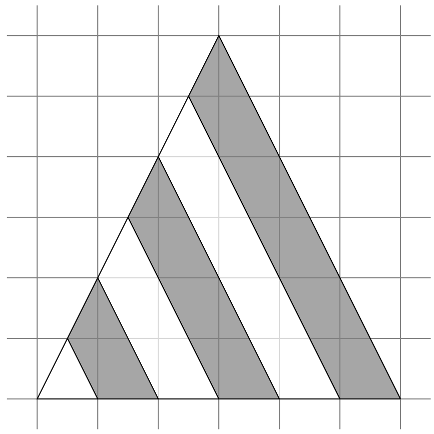
3. Egy nagy táblára az első 99 pozitív egész szám van felírva. Bori minden lépésben letöröl 3 számot és felírja vagy a három szám összegét, vagy a három szám szorzatát. Néhány ilyen lépés után csak páratlan számok maradtak a táblán. Ráadásul sikerült ezt a helyzetet úgy elérnie, hogy ennél több páratlan szám nem maradhatott volna. Hány szám szerepelt ekkor a táblán?

Megoldás. A táblán kezdetben 49 darab páros és 50 darab páratlan szám szerepel. Bori minden lépésben 2-vel csökkenti a táblára írt számok darabszámát, hiszen három számot helyettesít eggyel. Így mindig páratlan darab szám fog a táblán szerepelni.
Ha Bori egy páratlan számot ír a táblára, biztosak lehetünk benne, hogy legalább egy páratlan számot letörölt ehhez, hiszen három páros szám összege és szorzata is páros. Emiatt a páratlan számok darabszáma nem tud növekedni.
Így ha nincs páros szám a táblán, akkor egyrészt legfeljebb 50 darab páratlan szám állhat ott, másrészt páratlan darab szám lehet csak a táblán. Emiatt Bori munkája végén legfeljebb 49 db páratlan szám állhatott a táblán.
Bori el is tudja érni, hogy pontosan 49 darab szám álljon a táblán, és semmi más.
Ennek egy lehetséges módja, ha elkezdi eltüntetni szép sorban a páros számokat úgy, hogy amíg van legalább öt belőlük, addig megfog hármat, és összeadja vagy összeszorozza őket. Így minden lépésben 2-vel csökkenti a páros számok számát.
Így eljut odáig, hogy pontosan 3 darab páros szám áll a táblán. Ekkor letöröl ebből kettőt, és még egy páratlan számot, és helyettük a szorzatukat írja fel, ami egy páros szám. Ekkor 49 darab páratlan és 2 darab páros szám lesz a táblán. A két páros számot és egy páratlant letörli, és az összegükre cseréli őket, ami páratlan. Így pontosan 49 darab páratlan szám marad a táblán.

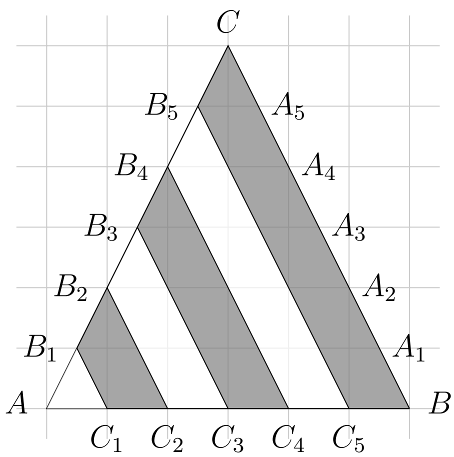
A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

4. Egy háromszöget az alábbi módon beszíneztünk fehérre és szürkére. Mekkora a szürke rész területe, ha egy rácsnégyzet minden oldala 1 egység?



Megoldás. Betűzzünk meg pontokat az ábrán, hogy könnyebb legyen hivatkozni rájuk, és az általuk meghatározott háromszögekre.



A legkisebb szürke területet megkaphatjuk úgy, ha az AB_2C_2 háromszögből elhagyjuk az AB_1C_1 háromszöget.
Ha az AB_2C_2 háromszög alapjának AC_2-t tekintjük, akkor ennek hossza 2 egység. Az ehhez tartozó C_1B_2 magasság szintén 2 egység, így a háromszög területe:

$$T_{AB_2C_2} = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $T_{AB_1C_1} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$. Vagyis a legkisebb szürke négyszög (trapéz) területe $\frac{3}{2}$.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

A középső szürke négyszög területét úgy kaphatjuk meg, ha az AB_4C_4 háromszög területéből kivonjuk az AB_3C_3 háromszög területét. A legnagyobb szürke négyszögét pedig úgy, ha az ABC háromszög területéből kivonjuk az AB_5C_5 háromszög területét.
Így a szürke részek területe:

$$T = \left(\frac{2\cdot 2}{2} - \frac{1\cdot 1}{2}\right) + \left(\frac{4\cdot 4}{2} - \frac{3\cdot 3}{2}\right) + \left(\frac{6\cdot 6}{2} - \frac{5\cdot 5}{2}\right) = \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

5. Egy kocka minden csúcsára ráírtunk egy-egy egész számot az $1, 2, \ldots, 8$ számok közül, minden számot pontosan egyszer használva.

(a) Kiszámoltuk minden csúcs esetén, hogy mennyi a rajta és az élszomszédain szereplő négy szám átlaga. Lehetséges-e, hogy ez a nyolc átlag mind egész szám?

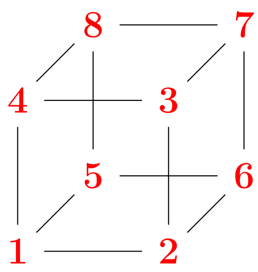
(b) Kiszámoltuk minden csúcs esetén, hogy mennyi az élszomszédain szereplő három szám átlaga. Lehetséges-e, hogy ez a nyolc átlag mind egész szám?

(Egy csúcsnak *élszomszéd*ja egy másik csúcs, ha van olyan éle a kockának, ami ezt a két csúcsot köti össze.)

Megoldás.

(a) Igen, lehetséges.

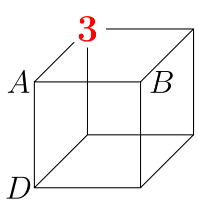
Az alábbi ábra mutatja a számok egy lehetséges elhelyezését:



(b) A számokat nem lehet így a kocka csúcsaiba írni.

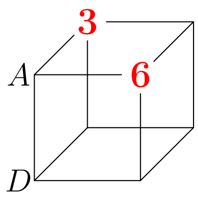
Ahhoz az kellene, hogy bármely csúcs három szomszédjára írt számok összege osztható legyen 3-mal, hiszen ekkor lesz ennek a három számnak az átlaga egész szám.

Tekintsünk egy csúcsot (A), amelynek az egyik élszomszédjára a 3-at írtuk.

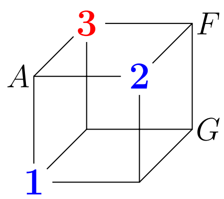


A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

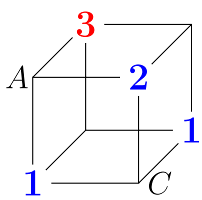
Ekkor az ábrán B-vel és D-vel jelölt csúcsokra egy 3-mal osztva 1, illetve 2 maradékot adó számot kell írnunk. Ez azért igaz, mert nem írhatunk 3-mal oszthatót, hiszen az csak a 6 lehetne. Ha viszont mondjuk a B csúcsra 6-ot írunk, akkor a D csúcsra is 3-mal osztható számot kellene írnunk, de azok már elfogytak.



Szimmetria miatt feltehetjük, hogy a D csúcsra írtunk 3-mal osztva 1, a B csúcsra 2 maradékot adó számot. (A kékkel jelölt számok a 3-as maradékot jelentik.)



Ahhoz, hogy az F csúcsban az átlag egész legyen, a G csúcsra egy 3-mal osztva 1 maradékot adó számot kell írnunk.



Ez viszont azt jelenti, hogy a C csúcsban az átlag nem lehet egész, hiszen a 3 szomszédos csúcsra írt szám összege 3-mal osztva 1-et ad maradékul.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

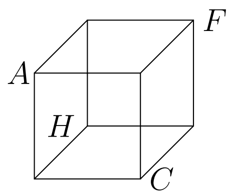
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-42

2. megoldás

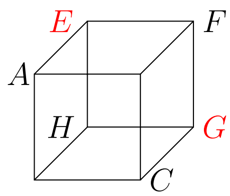
A számokat nem lehet így a kocka csúcsaiba írni.

Ahhoz az kellene, hogy bármely csúcs három szomszédjára írt számok összege osztható legyen 3-mal, hiszen ekkor lesz ennek a három számnak az átlaga egész szám.

Az első 8 pozitív egész között nincsen 4, amelyek azonos maradékot adnak 3-mal osztva. (3-3 szám ad 1 és 2 maradékot, és csak 2 ad 0-t.)



Tekintsük a fenti ábrát. Az előzőek miatt a C, F és H csúcsok között van olyan, ahová más 3-as maradékú számot írtunk, mint A-ra. Feltehetjük, hogy ez a csúcs C, hiszen a C, F és H csúcsok azonos helyzetűek A-hoz képest.



Tekintsük most az E és a G csúcsok szomszédainak az átlagát. Ahhoz, hogy mindkét átlag egész legyen az kell, hogy az A, F és H, illetve a C, F és H csúcsokra írt számok összege is 3-mal osztható legyen. Ez a két összeg majdnem megegyezik, ha az elsőben kicseréljük az A csúcsra írt számot a C csúcsra írt számra, akkor megkapjuk a második összeget. De ha az első összeg osztható volt 3-mal, akkor a második nem lehet az, mert az A-ra írt számot egy tőle különböző 3-as maradékú C számra cseréltük.

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő