



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Vármegyei forduló – 2025. március 21.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Hány olyan 8-jegyű páratlan pozitív egész szám van, amelyben bármely két szomszédos számjegy különbsége 4? (A különbség úgy értendő, hogy a nagyobb számjegyből vonjuk ki a kisebbet.)

Megoldás. Mivel a szám utolsó jegye páratlan, a négyes különbségek miatt az összes számjegye páratlan lesz.

Ha szerepel a számban 3-as számjegy, akkor annak a szomszédai csak 7-esek lehetnek. Ugyanez fordítva is igaz: ha szerepel 7-es számjegy, akkor annak szomszédai csak 3-asok lehetnek. Tehát ezekben az esetekben más számjegy nem lehet a számban, ráadásul ezek a számjegyek is biztosan felváltva szerepelnek, így két lehetséges 8-jegyű szám jön szóba: 37373737, illetve 73737373.

Ha nem szerepel a számjegyek között se 3, se 7, akkor a számot az 1, 5, 9 számjegyek alkotják. Vegyük észre, hogy akár 1-es, akár 9-es van valamelyik helyen, akkor annak mindkét szomszédja csak 5-ös lehet. Ugyanakkor az 5-ös mellett egyaránt állhat 1 vagy 9. Ezek alapján a keresett számok $\overline{x5x5x5x5}$ vagy $\overline{5x5x5x5x}$ alakban írhatók, ahol x helyére mindig egymástól függetlenül írhatunk 1-es vagy 9-es számjegyet.

Ez mindkét esetben $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ féle lehetőséget ad, tehát 3-ast nem tartalmazó megfelelő számból 32 darab van.

Összesen a feladat feltételeit 34 különböző 8-jegyű szám teljesíti.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

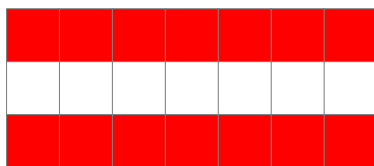
Adószám: 19002457-2-42

2. Jenő egyforma, szürke, 1 cm élhosszúságú kiskockákból egy $3 \times 5 \times 7$ -es téglatestet épített úgy, hogy 5 cm a magassága. Ezután a magasság szerinti középső szinten elhelyezkedő kiskockákat mind kicserélte pirosra. Majd a téglatestet átforgatta úgy, hogy 3 cm legyen a magassága, és az így kapott - magasság szerinti - középső szinten lévő kiskockák mindegyikét fehérre cserélte. Végül a téglatestet 7 cm magasságúra fordítva, a középső szinten lévő kockákat ismét kicserélte, ezúttal zöldre.

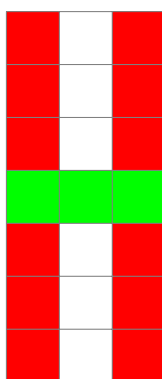
Mikor elkészült, Fanni lerombolta az építményt, s a benne lévő összes piros kocka (és csak azok) felhasználásával egy másik téglatestet készített. Legfeljebb mekkora lehet a Fanni által épített test felszíne?

Megoldás. Ha kezdetben a téglatest magassága 5 cm, akkor a pirosra cserélt kockák 3×7 -es elrendezésben vannak. A legvégén azonban nem 21 piros kiskocka lesz, hiszen ezek valamelyikét a továbbiakban Jenő még lecseréli fehérre, vagy zöldre. Vizsgáljuk meg, hogy mely kockákat fogja lecserélni. Ehhez csak azt a 21 kiskockát nézzük a továbbiakban, amiket az első lépésben pirosra cserélt, hiszen számunkra érdektelen, hogy a maradék szürke kiskockák közül mi változik esetleg fehérre vagy zöldre.

Az átfordítás után, ha 3 cm lett a téglatest magassága, akkor az ábrán látható módon, a középső sor kockáit cserélte le Jenő fehérre.



Végül, a 7 cm-es magassággal nézve, újfent a középső szint kockáit cserélve a vizsgált kockák a következő képet fogják mutatni:



Ez tehát azt is mutatja nekünk, hogy végeredményben 12 piros kocka állt Fanni rendelkezésére téglatest építéséhez. Nézzük meg, hogy ez a darabszám milyen téglatestek létrehozását teszi lehetővé, s hogy ezeknek mekkora a felszíne.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

A téglatest mérete	A téglatest felszíne
$1 \times 1 \times 12$	$2 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 12 + 1 \cdot 12) = 50$
$1 \times 2 \times 6$	$2 \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6) = 40$
$1 \times 3 \times 4$	$2 \cdot (1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = 38$
$2 \times 2 \times 3$	$2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 32$

Tehát a Fanni által épített téglatest felszíne legfeljebb 50 cm^2 lehet.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

3. Néhány ember áll egy sorban egymás mellett, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az előbbieket mindig igazat mondanak, az utóbbiak mindig hazudnak. Balról az első ember elhalad a többiek előtt, és sorban mindenkiről nyilatkozik, és vagy azt mondja, hogy „igazmondó”, vagy azt, hogy „hazudós”. Ezután kimegy a teremből. Aki eredetileg a második volt a sorban balról, ugyanezt teszi. (Ő tehát már eggyel kevesebbszer nyilatkozik, mint az első.) Ezt folytatják. Amikor ketten maradtak, akkor a baloldali nyilatkozik a másikról, hogy igazmondó vagy hazudós, majd kimegy a teremből. Végül az utolsó is kimegy a teremből.

Hány igazmondó és hány hazudós lehetett a legelején a teremben, ha 64-szer hangzott el, hogy „igazmondó”?

Megoldás. Pontosan akkor mondja valaki a másikról, hogy „igazmondó”, ha vagy mindketten igazmondók, vagy mindketten hazudósak. És pontosan akkor hangzik el, hogy „hazudós”, ha a két ember különböző.

Azzal, hogy sorban kimennek az emberek a teremből és nyilatkoznak, bármely két ember pontosan egyszer kerül párba egymással.

Ha I igazmondó van, akkor $\frac{I \cdot (I-1)}{2}$ esetben hangzik el az, hogy „igazmondó” úgy, hogy mindkét ember igazmondó. Hiszen minden igazmondó találkozik $I - 1$ másik igazmondóval, de egy párt pontosan egyszer akarunk számolni, ezért kell $I \cdot (I - 1)$ -et el kell osztanunk 2-vel. Hasonlóan, ha H hazudós van, akkor $\frac{H \cdot (H-1)}{2}$ esetben hangzik el az, hogy „igazmondó” úgy, hogy mindkét ember hazudós.

Nézzük meg az $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ alakú számokat, amelyek kisebbek 64-nél:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

(Ezeket a számokat *háromszögszámok*nak szokás nevezni.)

A fentiek alapján a 64 két olyan szám összege, amely szerepel a felsorolásban.

Ez csak egyetlen módon lehetséges: $64 = 28 + 36 = \frac{8 \cdot (8-1)}{2} + \frac{9 \cdot (9-1)}{2}$.

Vagyis összesen 17 ember állt sorban, és vagy 8 igazmondó és 9 hazudós van közöttük, vagy 9 igazmondó és 8 hazudós.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

4. Az alábbi 6×6 -os táblázat minden mezőjét szeretnénk kitölteni sárga vagy piros színnel. Az oszlopok *fölé*, illetve a sorok *elé* írt számok azt jelzik, hogy az adott oszlopban, illetve sorban mennyi a legtöbb egymás melletti pirosra színezett mező. Az oszlopok *alá*, illetve a sorok *mögé* írt számok pedig azt jelzik, hogy az adott oszlopban, illetve sorban mennyi a legtöbb egymás melletti sárgára színezett mező.

Másold le a lapodra az alábbi táblázatot és színezd ki azt a két színnel a feladat szövegének megfelelően. (Színezés helyett írhatod a sárga mezőkbe S-t, a piros mezőkbe P-t.)

	3	2	3		1	
2						
						2
4						1
1						2
3						2
						3
			3	3	2	

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyesen kiszínezett táblázat megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes színezés megtalálását.

Megoldás. Mutatunk egy lehetséges megoldást, ahogyan el lehet jutni a helyes színezéshez.

A harmadik sorban lévő 4 piros mező vagy a középső 4 mező, vagy valamelyik szélső 4. Mindkét esetben a két középső mező a sorban piros.

Emiatt a negyedik oszlopban csak úgy lehet 3 sárga egymás mellett, ha az alsó 3 mező sárga.

Így az ötödik sorban csak úgy lehet 3 piros egymás mellett, ha az első 3 mező piros.

Az ötödik sorban csak úgy lehet a szomszédos sárga mezők maximuma 2, ha az ötödik mező sárga, a hatodik pedig piros.

Mivel a hatodik oszlopban nincs két szomszédos piros mező, ezért a negyedik és a hatodik mező is sárga.

A negyedik sorban nem lehet három szomszédos sárga, ezért az ötödik mező piros.

	3	2	3		1	
2						
						2
4						1
1						2
3						2
						3
			3	3	2	

	3	2	3		1	
2						
						2
4						1
1						2
3						2
						3
			3	3	2	

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.





TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Az ötödik oszlopban van 3 szomszédos sárga, de ez csak úgy lehet, ha az első három sárga.

Most már ki tudjuk tölteni a teljes harmadik sort, az első 4 mező piros, és az utolsó is, hiszen nem lehet két sárga ebben a sorban egymás mellett.

A hatodik oszlopban pedig az első két mezőnek sárga, mert kell lennie két szomszédos sárgának.

Mivel a második sorban legfeljebb két sárga mező lehet egymás mellett, ezért a negyedik mező piros.

Mivel a második oszlopban legfeljebb két szomszédos piros mező lehet, ezért a negyedik mező sárga.

Most már a negyedik sort is teljesen ki tudjuk tölteni, hiszen a harmadik mező nem lehet sárga, mert akkor lenne 3 szomszédos sárga és csak 2 lehet, vagyis az a mező piros. Így viszont az elsőnek kell sárgának lennie, hiszen kell két szomszédos sárga ebben a sorban.

Mivel a harmadik oszlopban legfeljebb 3 piros mező lehet egymás mellett, ezért a második és a hatodik mező is sárga.

Mivel a hatodik sorban 3 a szomszédos sárgák maximuma, így az ötödik mező nem lehet sárga, és ezért a másodiknak annak kell lennie. Ugyanezért az első mező is piros ebben a sorban.

Mivel az első oszlopban van 3 szomszédos piros, ezért az első két mező piros.

A második oszlopban a szomszédos pirosak maximuma 2, ezért az első mező sárga, a második piros.

Az első sorban pedig kell két szomszédos pirosnak lennie, így a maradék két mező (a harmadik és a negyedik) piros.

	3	2	3			1	
2							
							2
4							1
1							2
3							2
							3
				3	3	2	

	3	2	3			1	
2							
							2
4							1
1							2
3							2
							3
				3	3	2	

	3	2	3			1	
2							
							2
4							1
1							2
3							2
							3
				3	3	2	

	3	2	3			1	
2							
							2
4							1
1							2
3							2
							3
				3	3	2	

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Berta egy vastag jegyzetömb minden lapjára egy négyzetet vagy egy szabályos ötszöget rajzolt. Kiszámolta, hogy a jegyzetömbbe rajzolt összes sokszög összes belső szögét tekintve, azok átlagos nagysága pontosan 99° . Ezután behúzta a sokszögek összes átlóját, ebből pontosan 2100 darab volt. Hány négyzetet és hány ötszöget rajzolt Berta a jegyzetömbbe?

Megoldás. Egy négyzet minden szöge 90° -os, egy szabályos ötszögé pedig 108° -os.

Mivel a szögek átlaga éppen 90° és 108° átlaga, ezért ugyanannyi 90° -os és 108° -os szöget rajzolt Berta.

Mivel egy négyzetnek 4, egy ötszögnek 5 szöge van, ezért a négyzetek száma pontosan $\frac{5}{4}$ -szerese az ötszögek számának, hiszen csak így lehet a 90° -os és a 108° -os szögek száma egyenlő.

Ha rajzolunk 5 négyzetet, akkor azoknak 10 átlója van. 4 ötszögnek pedig összesen 20, hiszen egy szabályos ötszögnek 5 átlója van.

Egy 5 négyzetből és 4 ötszögből álló „csomagban” tehát 30 átló van összesen.

Mivel összesen 2100 átló van, így 70 ilyen „csomagnak” kell lennie.

Tehát Berta $70 \cdot 5 = 350$ négyzetet és $70 \cdot 4 = 280$ szabályos ötszöget rajzolt.

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ