



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

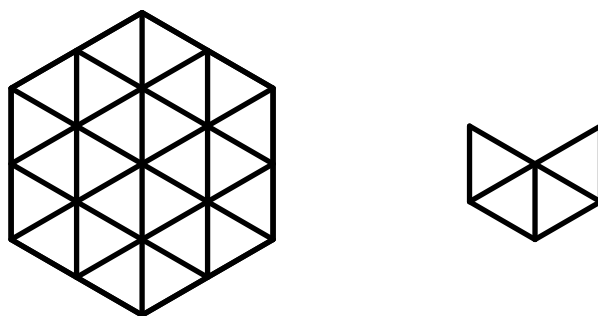
Országos döntő – 1. nap – 2025. május 30.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

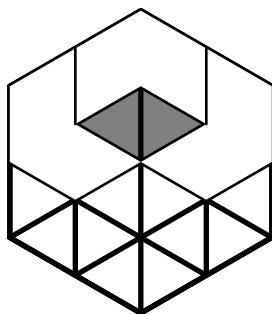
MEGOLDÁSOK

1. Hányféleképpen lehet átfedés nélkül és hézagmentesen lefedni a bal oldalon látható ábrát egybevágó elemekkel, ha a lefedéshez használható elemek a jobb oldali ábrán láthatóak?

Két lefedést nem tekintünk különbözőnek, ha az egyikből megkaphatjuk a másikat síkbeli elforgatással.



Megoldás. Vizsgáljuk először a hatszög egy adott csúcsánál elhelyezkedő két háromszög lefedését. Könnyen meggondolható, hogy ezek nem lehetnek különböző elemmel lefedve, hiszen akkor a két rájuk elhelyezett elem valamelyike kilógna a hatszögből, vagy pedig átfedésben lennének. Tehát a hatszög minden csúcsára elmondható, hogy az ott található két háromszög közösen van lefedve egy elemmel. Tegyük fel, hogy valamelyik csúcsnál lévő két háromszög a lefedés során egy elem két középső háromszögével van fedve. Ha emellett elkezdjük folytatni a lefedést, hamar ellentmondásra jutunk, hiszen mindkét oldalán csak egyféleképpen lehet szabályosan fedni, így viszont kimarad az alábbi ábrán szűr-kével jelzett két háromszög, ami már sehogyan sem fedhető le szabályosan.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

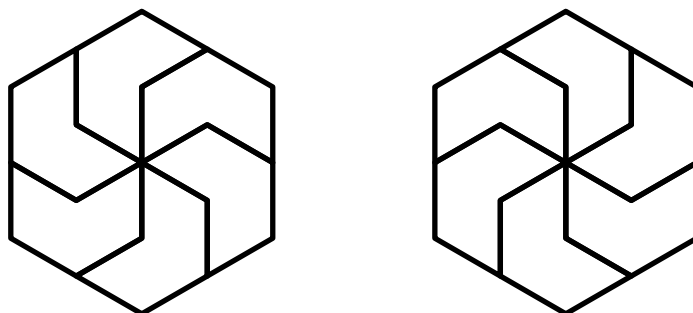
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Emiatt, ha egy csúcsnál szeretnénk a két hozzá tartozó háromszöget jól lefedni, akkor erre csak kétféle lehetőségünk van, s ezek mindegyike csak egyféleképpen fejezhető be szabályosan, ahogyan az az alábbi két ábrán is látható. Mivel ezek forgatással nem egymásba vihetők, ezért kétféleképpen lehet lefedni a hatszöget a feltételeknek megfelelően.



2. Peti felírt négy pozitív egész számot, majd megnézte közülük minden párra a számok különbségét (a nagyobból kivonva a kisebbet). Észrevette, hogy a legkisebb különbség 1, a legnagyobb 13, a maradék négy páronkénti különbség pedig 4 szomszédos egész szám. Azt is kiszámolta, hogy a négy felírt szám összege 52. Mik lehetnek a Peti által felírt számok?

Adj meg két különböző számnégyest, amit Peti felírhatott!

Két számnégyes különböző, ha van olyan szám az egyikben, amelyik nem szerepel a másikban.

A teljes pontszám eléréséhez elegendő két megfelelő számnégyes megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik a helyes megoldások megtalálását.

Megoldás.

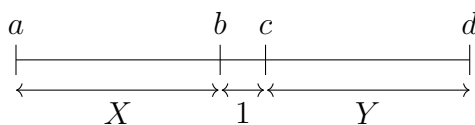
- 7, 12, 13, 20 egy jó megoldás, hiszen a páronkénti különbségek: 1, 5, 6, 7, 8, 13.
- 6, 13, 14, 19 egy másik lehetséges jó megoldás, hiszen a páronkénti különbségek: 1, 5, 6, 7, 8, 13.

Csak ez a két megoldás létezik és a továbbiakban egy módszert mutatunk arra, hogy ezeket hogyan lehet megtalálni.

Legyenek a számok $a < b < c < d$. A legnagyobb különbség úgy keletkezik, hogy a legnagyobb számból vonjuk ki a legkisebbet, tehát $d - a = 13$, azaz $d = a + 13$.

Ha a két szélső szám (mondjuk a és b) különbsége 1, akkor b és d különbsége 12, tehát a másik négy különbség mindegyike legalább 9, azaz a b és c , illetve a c és d is, így a b és d különbségének legalább 18-nak kéne lennie, ami nem lehetséges.

Vagyis a két középső szám különbsége lesz az 1, azaz $c - b = 1$.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Mivel a két szélső szám különbsége 13, ezért látható, hogy $X + Y = 12$. Ha $X = 6$ és $Y = 6$, akkor lesz két egyforma különbség a maradék négy közt, ami nem lehetséges. Ha $X \leq 4$ vagy $X \geq 8$, akkor $Y \geq 8$, illetve $Y \leq 4$, vagyis ekkor sem lehetnek a különbségek 4 szomszédos szám. Vagyis az a két lehetőség maradt, hogy $X = 5$, illetve $X = 7$.

Az első esetben a számok: a , $a + 5$, $a + 6$ és $a + 13$. Ezek összege 24-gyel több, mint a 4-szerese, vagyis $a = 7$, és a számok így: 7, 12, 13, 20. A második esetben pedig a számok: a , $a + 7$, $a + 8$ és $a + 13$. Ezek összege 28-cal több, mint a 4-szerese, vagyis $a = 6$, és a számok így: 6, 13, 14, 19.

3. Néhány gyerek, köztük Eszti és Barni, kagylókat gyűjtött a tengerparton. Ha Eszti a kagylói közül 8-at Barninak adna, akkor minden gyereknek ugyanannyi kagylója lenne. Ha Barni minden kagylóját Esztinek adná, akkor Esztinek annyi kagylója lenne, mint mindenki másnak együttvéve. Hány gyerek gyűjthetett kagylót a tengerparton?

Megoldás. Eszti biztosan gyűjtött kagylót, hiszen 8-at tudna adni Barninak.

Van legalább még egy gyerek, hiszen egyébként a második állítás, miszerint Barninak és Eszternek ugyanannyi kagylója van, mint a többieknek együttvéve, nem lehetne igaz. Legyen az egyik gyerek a többi közül Alfréd. Az első állítás alapján Esztinek 8-cal több, Barninak 8-cal kevesebb kagylója van, mint Alfrédnak, és mindenki másnak ugyanannyi van, mint Alfrédnak.

Vagyis Esztinek és Barninak összesen kétszer annyi kagylója van, mint Alfrédnak, így a második állítás alapján Alfrédon kívül még pontosan egy gyerek gyűjtött kagylót.

Vagyis 4 gyerek gyűjtött kagylót a tengerparton.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

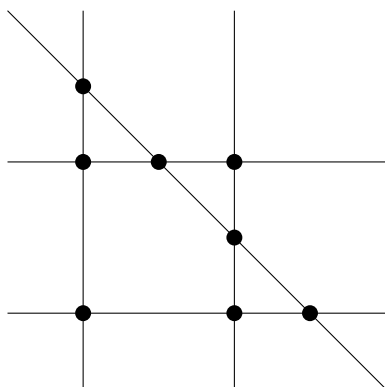
4. Varázsmánónak 9 egyenese van. Ezek közül néhányat lerakott a síkra úgy, hogy a lerakott egyenesek metszéspontjainak száma pontosan 8 lett. Hány egyenest tehetett a síkra Varázsmánó?

A lehetséges értékekhez készíts egy-egy megfelelő ábrát! Ami nem lehetséges, azt indokold, hogy miért nem!

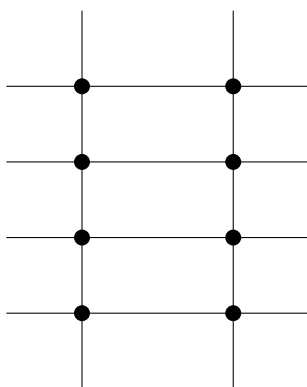
Megoldás. Legalább 5 egyenest kell használnia Varázsmánónak. Ha legfeljebb 4 egyenest használ, akkor azoknak legfeljebb 6 metszéspontjuk lehet, hiszen ha bármely két egyenesnek van metszéspontja, akkor az $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ metszéspont.

Az alábbi ábrák mutatják, hogy az 5, 6, 7, 8, 9 mind lehetséges esetek.

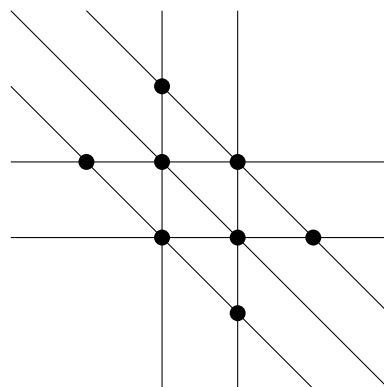
5:



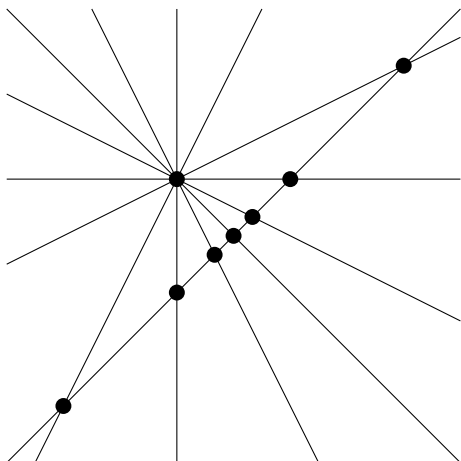
6:



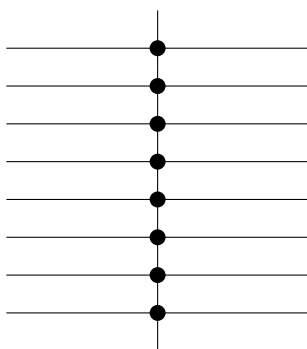
7:



8:



9:



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

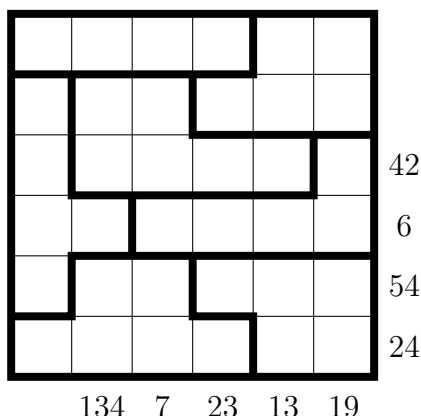
Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Írd be az alábbi 6×6 -os négyzet néhány mezőjébe az 1, 2 vagy 3 számokat úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek.

- Minden mezőbe legfeljebb 1 szám kerülhet.
- Minden vastag vonallal körülhatárolt terület részben az 1, 2 és 3 számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen.
- A sorok és az oszlopok végén lévő számok azt mutatják, hogy ha az adott sorban vagy oszlopban a szomszédos számjegyeket egy számmá olvassuk össze, akkor mennyi ezeknek a számoknak az összege. (A sorokban a számokat balról jobbra, az oszlopokban pedig fentről lefelé olvassuk össze.)

Például, ha egy sorban az alábbi módon helyezkednek el a számok: 1, üres, 3, 2, üres, 3, akkor az összeg $1+32+3=36$. Ha egy sor vagy oszlop szélére nincs szám írva, akkor arról az összegről nem tudunk semmit.



A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyesen kitöltött táblázat megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes kitöltés megtalálását.

Megoldás. Látható, hogy a harmadik sorban a 42 csak két 1-esre végződő kétjegyű szám összegeként tud létrejönni. Közülük az első szám végének 1-e csak a középső részbe tud esni, így a második szám végének 1-e csak az utolsó oszlopba jöhet. Ezután az utolsó oszlopban a 19 csak $13 + 3 + 3$ alakban tud előállni, és az 1-es helyzete miatt már egyértelmű az oszlop kitöltése. Ezután nézzük meg az ötödik sort. Mivel abban a sorban az utolsó oszlopban lévő mező üres lesz, így a sor két kétjegyű számból fog állni, aminél az egyiknek a jegyei 1 és 2. Ez csak $33 + 21$ alakban lehetséges, így az ötödik sor kitöltését is meghatároztuk. Ekkor így fog kinézni az ábra (×-szel jelöltük azokat a mezőket, ahova már biztosan nem kerülhet szám):

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

					3	
					×	
					1	42
				×	3	6
3	3	×	2	1	×	54
				×	3	24
134	7	23	13	19		

Ekkor az ötödik oszlopba még egy 12-est kell beírni, és mivel tudjuk, hogy az oszlop harmadik mezője nem lehet üres, ezért ott lesz a 2-es. Ezután a harmadik sorban beírhatjuk a 21-est a sor első két helyére. A harmadik oszlopba ahhoz, hogy 7 legyen az összeg, három egyjegyű számot kell beírni. A negyedik sorba csak a 2 jöhet, így az alsó sorban is egy kettesnek kell jönnie. Innen a negyedik és hatodik sor kitöltése is egyértelmű.

				×	3	
				1	×	
2	1	×	×	2	1	42
1	×	2	×	×	3	6
3	3	×	2	1	×	54
×	×	2	1	×	3	24
134	7	23	13	19		

Ekkor a második oszlop első két helyére még be kell írunk egy 1-est és egy 3-ast, majd a harmadik oszlop első sorába egy 3-ast, ezután a maradék két kettest egyértelműen be lehet írni úgy, hogy minden területen minden szám 1-szer legyen, és a negyedik oszlopban is 23 legyen az összeg.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2	1	3			3	
	3		2	1		
2	1			2	1	42
1		2			3	6
3	3		2	1		54
		2	1		3	24
134	7	23	13	19		

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ