



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

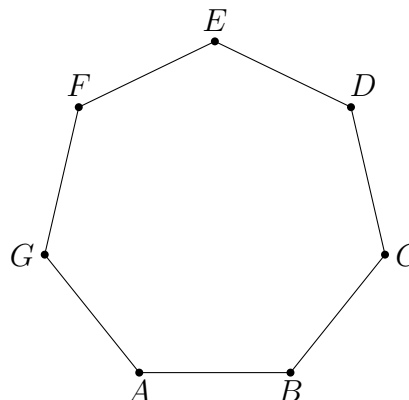
Országos döntő – 2. nap – 2025. május 31.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Az ábrán látható szabályos hétszög minden csúcsát a piros, kék, sárga, zöld színek valamelyikével színeztük ki úgy, hogy bármely átló két végpontja különböző színű. Hányféleképpen tehettük meg ezt?

Két színezést különbözőnek tekintünk, ha van olyan csúcs, amelynek a színe a két színezésben eltérő.



Megoldás. Mivel bármely két nem szomszédos csúcs között halad egy átló, ezért csak szomszédos csúcsok lehetnek azonos színűek. Vagyis minden szín legfeljebb kétszer szerepel.

Ha sorban haladunk a csúcsok mentén, akkor vagy egy, vagy két azonos színű csúcsot találunk, majd jön egy másik szín.

Mivel 7 csúcs van, ezért ebből következik, hogy pontosan egy szín szerepel egyszer, a másik három pedig kétszer.

7 különböző módon választhatjuk, hogy melyik csúcs színe olyan, ami csak egyszer szerepel. Ez a csúcs 4-féle színű lehet.

A maradék 3 színt sorba kell raknunk, és mondjuk óramutató járásával megegyező irányban kettesével kell a sorrendnek megfelelően kiszínezni a csúcsokat. Az első szín lehet háromféle, a második kétféle, a harmadik pedig már csak egyféle. Vagyis a 3 szín sorrendje: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -féle lehet.

Ezek alapján az összes lehetséges színezés száma:

$$7 \cdot 4 \cdot 6 = 168.$$

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2. Hányféleképpen lehet az alábbi ábrán látható 3×3 -as négyzet mezőibe az $1, 2, 3, \dots, 9$ számokat beírni, mindegyiket pontosan egy mezőbe úgy, hogy a sorok végén jobbra és az oszlopok alatt látható számok az adott sorban, illetve oszlopban lévő két legnagyobb szám összege legyenek?

Pl. az első oszlopban lévő három szám közül a két legnagyobb összege 9.

			17
			6
			13
9	16	14	

Megoldás. Az első sorban szerepelnie kell a 8-nak és a 9-nek is, mert csak így lehet a két legnagyobb szám összege 17. A középső oszlopban kell szerepelnie a 7-nek és a 9-nek, hiszen másképp nem lehet a két legnagyobb szám összege 16. Ebből következik, hogy az első sor középső eleme 9. A második oszlopban nem lehet a 7-es a középső elem, hiszen akkor a középső sor két legnagyobb elemének összege legalább 8 lenne. Vagyis a harmadik sor középső eleme 7.

Az utolsó oszlopban nincs 9-es, így a két legnagyobb szám összege csak úgy lehet 14, ha a 8 és a 6 szerepel ebben az oszlopban. Mivel a 8-ról már korábban kiderült, hogy az első sorban van, így az első sor utolsó eleme 8. Tudjuk, hogy a harmadik oszlopban van a 6 is, de az nem lehet a második sorban, hiszen akkor nem 6 lenne a második sor két legnagyobb elemének az összege, így a harmadik sor harmadik eleme 6.

Az első oszlopban csak úgy lehet a két legnagyobb szám összege 9, ha az 5 és 4 is szerepel ott, hiszen a 6, 7, 8 és 9 számok már nem lehetnek az első oszlopban. Viszont a második sorban kell lennie az 1, 2 és 4 számoknak, hiszen máshogy nem lehet a két legnagyobb szám összege 6. Vagyis a 4 az első oszlop második eleme.

Itt tartunk most:

	9	8	17
4			6
	7	6	13
9	16	14	

Az 1 és 2 a második sorban van, a 3 és az 5 pedig az első oszlopban, de ez utóbbi két pár pontos helyét nem tudjuk.

Az első oszlopban és a második sorban is kétféleképpen tudjuk elhelyezni a számokat, és ezek egymástól függetlenek, így 4 egymástól különböző, de a feltételeknek megfelelő kitöltés van.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

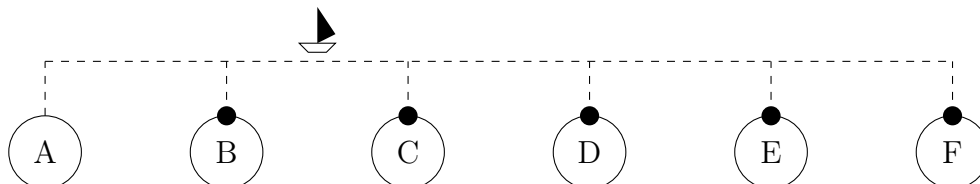
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

3. Hat sziget fekszik sorban egy egyenes mentén, az ábra szerint.



Az A szigeten lakó pék eddig minden reggel elindult az árujával, sorra kikötött a B, C, D, E és F szigetekre, végül hazahajózott A-ra. Most azonban B és C sziget lakói összevesztek, és egyikük sem fogadja a közvetlenül a másik kikötőjéből érkező hajókat.

Hányféle sorrendben szállíthatja ki a pék az áruját a másik öt szigetre, ha a hajójával megtett út ugyanolyan hosszú marad?

A pék mindig a szaggatott vonalon hajózik, az árut a fekete pontokkal jelzett kikötőkben rakja ki.

Megoldás. A péknek az útja megtervezésekor azt kell eldöntenie, hogy a B, D és E szigetek közül melyek azok, amelyeken már az F felé vezető útján ki szeretne kötni. Ha ezeket eldöntötte, abból már minden egyéb következik.

Ha B szigeten nem köt ki odafelé, akkor C szigeten ki kell kötnie; ha kiköt B-n, akkor C-n a visszaút során kell megállnia.

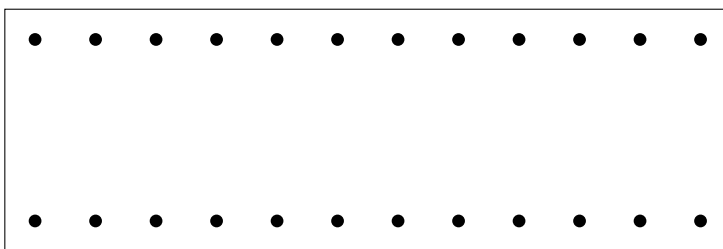
Ha D szigeten nem köt ki az odaút során, akkor meg kell állnia a visszaúton. E-vel ugyanez a helyzet.

Az F szigetet csak egyszer érinti az útja, így akkor meg is kell állnia.

A péknek tehát három, egymástól független döntést kell meghoznia, és minden esetben két lehetőség közül választhat. Így összesen $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ -féle útvonalat tervezhet magának.

4. Mágikus floorballedzést tartanak egy téglalap alakú tornateremben. A játékosok a tornaterem két szemközeti oldala mentén helyezkednek el, két párhuzamos sorban. Mindkét sorban 12-12 gyerek áll, és az egy sorban lévő szomszédos játékosok között egyenlőek a távolságok (lásd ábra). Mindenkinél van egy labda, amit a földön gurítva átpasszol valamelyik játékosnak a szemben lévő sorba. A labdákat egyszerre lövik el úgy, hogy minden labda 2 másodperc alatt jutna el a másik sorban álló játékoshoz. (Minden labda sebessége állandó a passz során, és minden labda egyenesen halad.) Azonban, ha néhány labda menet közben egy helyre ér, akkor összeütköznek és mágikus módon eltűnnek. Ha néhány labda egyszerre érkezik meg egy játékoshoz, akkor azok már nem tűnnek el.

Legfeljebb hány labda tud így átjutni az átellenes sorba?



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

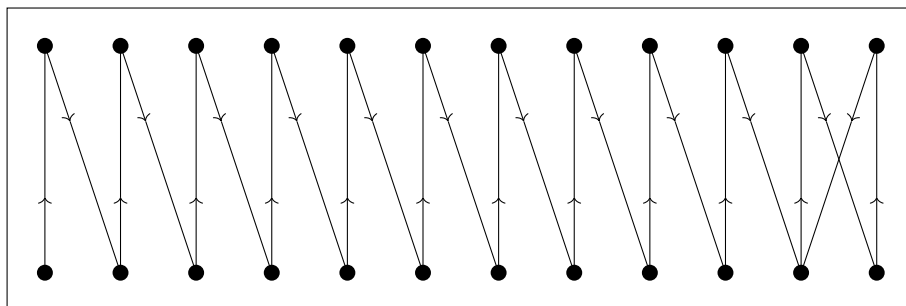
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

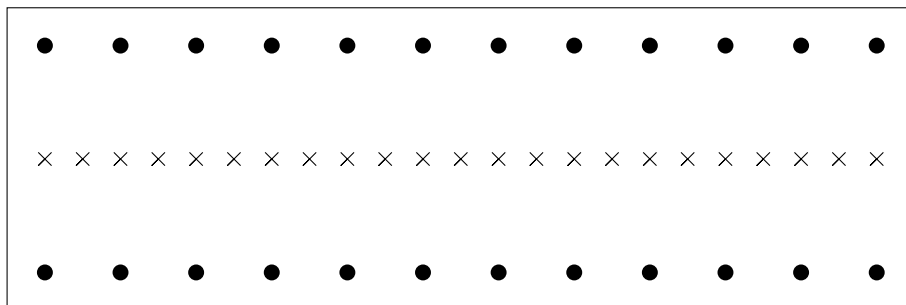
Adószám: 19002457-2-42

Megoldás. Először mutatunk egy példát, ahogyan 22 labda célba érhet, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem tud átérti a szemközti sorba.

Az alábbi ábrán látható, hogy ha minden gyerek a tőle kiinduló nyíllal jelzett útvonalon passzolja át a labdát, akkor csak két labda ütközik össze, a többi célba ér.



Vizsgáljuk most az előbbi ábrán látható szakaszok felezőpontjait. Ha 23 labda célba érne, akkor ezek egyike sem ütközött, következésképp a 24. labda sem ütközik, így az is átért a szemközti sorba. Tegyük fel, hogy ez lehetséges. Ekkor, mivel minden labda pontosan 2 másodperc alatt érne át a szemközti sorba, ezért 1 másodperc elteltével minden labda a jelzett felezőpontok valamelyikében lenne. Sőt, bármelyik gyerek bármelyik másiknak passzolná a labdát, ez ugyanúgy igaz lenne. Tehát 1 másodperc után minden labda az alábbi ábrán látható 23 darab x-szel jelzett hely valamelyikén tartózkodna.



Viszont, mivel csak 23 felezőpont van, így ha korábban nem történik ütközés, akkor 1 másodperc elteltével ezen helyek valamelyikén lesz legalább két labda. Ezek tehát ugyanazon a helyen vannak egyszerre, így nem lehetséges, hogy mindegyik labda célba érjen. Vagyis 22-nél több labda tényleg nem kerülhet át megfelelően a szemközti sorba.

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ