



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

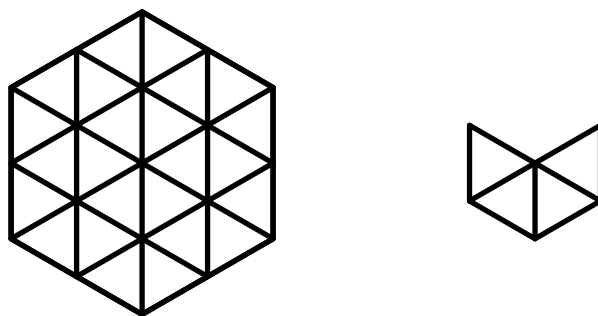
Országos döntő – 1. nap – 2025. május 30.

HATODIK OSZTÁLY

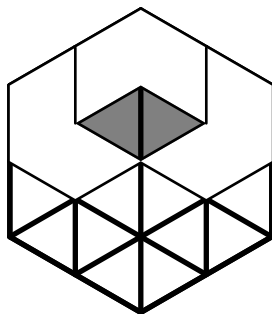
MEGOLDÁSOK

1. Hányféleképpen lehet átfedés nélkül és hézagmentesen lefedni a bal oldalon látható ábrát egybevágó elemekkel, ha a lefedéshez használható elemek a jobb oldali ábrán láthatóak?

Két lefedést nem tekintünk különbözőnek, ha az egyikből megkaphatjuk a másikat síkbeli elforgatással.



Megoldás. Vizsgáljuk először a hatszög egy adott csúcsánál elhelyezkedő két háromszög lefedését. Könnyen meggondolható, hogy ezek nem lehetnek különböző elemmel lefedve, hiszen akkor a két rájuk elhelyezett elem valamelyike kilógna a hatszögből, vagy pedig átfedésben lennének. Tehát a hatszög minden csúcsára elmondható, hogy az ott található két háromszög közösen van lefedve egy elemmel. Tegyük fel, hogy valamelyik csúcsnál lévő két háromszög a lefedés során egy elem két középső háromszögével van fedve. Ha emellett elkezdjük folytatni a lefedést, hamar ellentmondásra jutunk, hiszen mindkét oldalán csak egyféleképpen lehet szabályosan fedni, így viszont kimarad az alábbi ábrán szűr-kével jelzett két háromszög, ami már sehogyan sem fedhető le szabályosan.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

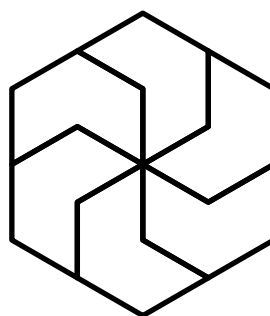
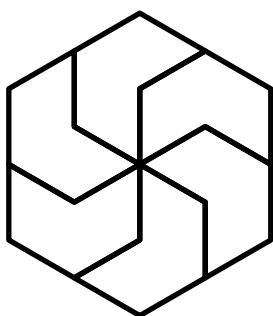
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Emiatt, ha egy csúcsnál szeretnénk a két hozzá tartozó háromszöget jól lefedni, akkor erre csak kétféle lehetőségünk van, s ezek mindegyike csak egyféleképpen fejezhető be szabályosan, ahogyan az az alábbi két ábrán is látható. Mivel ezek forgatással nem egymásba vihetők, ezért kétféleképpen lehet lefedni a hatszöget a feltételeknek megfelelően.



2. Felírtunk egymás mellé hét pozitív egész számot úgy, hogy bármely három szomszédosnak az összege 30. Tudjuk azt is, hogy a számok átlaga 12. Hányféle számsort írhattunk?

Megoldás. Ha 7 szám átlaga 12, akkor ezek összege $7 \cdot 12 = 84$. Tudjuk, hogy az első három szám összege is 30 és az utolsó három számé is, így a középső szám biztosan a 24.

Legyenek a számok a következők:

$$a, b, c, 24, d, e, f.$$

Tudjuk, hogy

$$a + b + c = 30 = b + c + 24,$$

vagyis $a = 24$. Hasonlóan

$$24 + d + e = 30 = d + e + f,$$

amiből pedig $f = 24$.

Mivel $b + c + 24 = 30 = c + 24 + d$, ezért $b = d$, és hasonlóan kapjuk, hogy $c = e$.

Azt is tudjuk, hogy $b + c = d + e = 6$, és minden szám pozitív egész. Így b értéke 5-féle lehet $(1, 2, \dots, 5)$, de ez meghatározza c értékét. De $b = d$ és $c = e$, így b értékének megválasztása meghatározza mind a 7 szám értékét.

Vagyis 5-féle számsort írhattunk:

$$24, 1, 5, 24, 1, 5, 24;$$

$$24, 2, 4, 24, 2, 4, 24;$$

$$24, 3, 3, 24, 3, 3, 24;$$

$$24, 4, 2, 24, 4, 2, 24;$$

$$24, 5, 1, 24, 5, 1, 24.$$

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

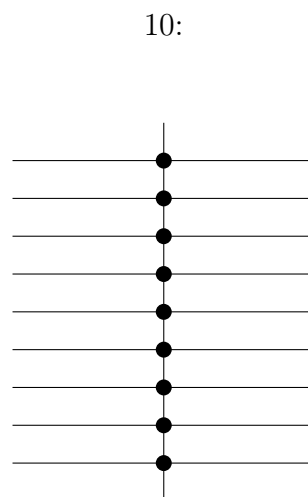
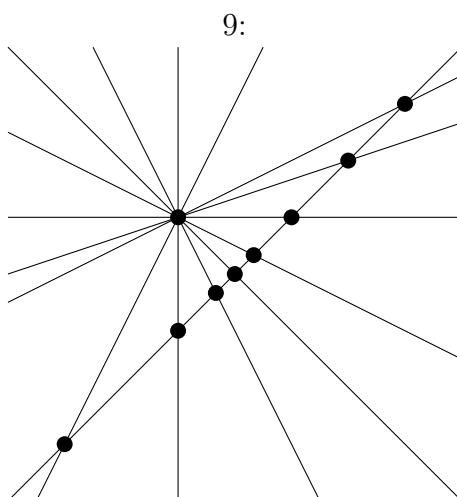
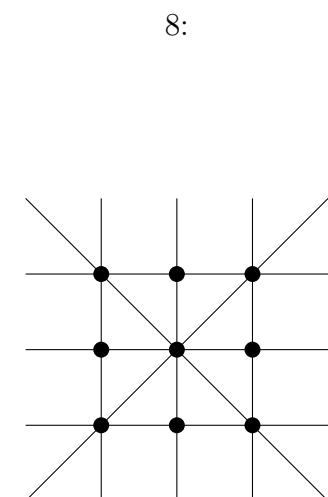
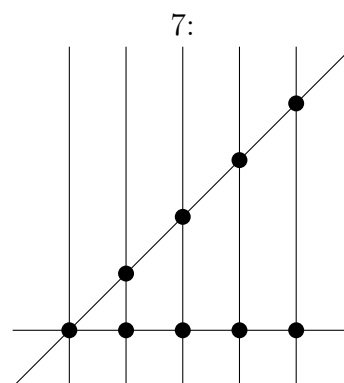
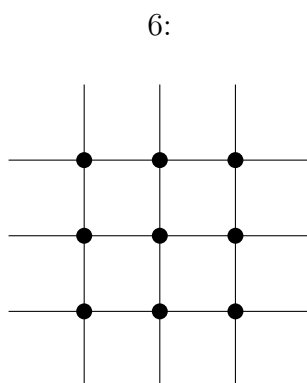
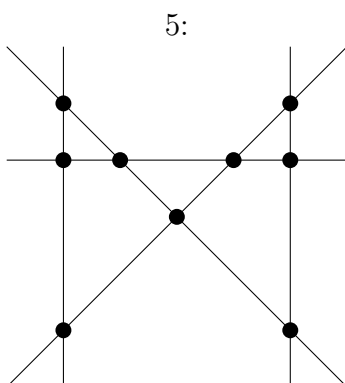
Adószám: 19002457-2-42

3. Varázsmánónak 10 egyenese van. Ezek közül néhányat lerakott a síkra úgy, hogy a lerakott egyenesek metszéspontjainak száma pontosan 9 lett. Hány egyenest tehetett a síkra Varázsmánó?

A lehetséges értékekhez készíts egy-egy megfelelő ábrát! Ami nem lehetséges, azt indokold, hogy miért nem!

Megoldás. Legalább 5 egyenest kell használnia Varázsmánónak. Ha legfeljebb 4 egyenest használ, akkor azoknak legfeljebb 6 metszéspontjuk lehet, hiszen ha bármely két egyenesnek van metszéspontja, akkor az $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ metszéspont.

Az alábbi ábrák mutatják, hogy az 5, 6, 7, 8, 9, 10 mind lehetséges esetek.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

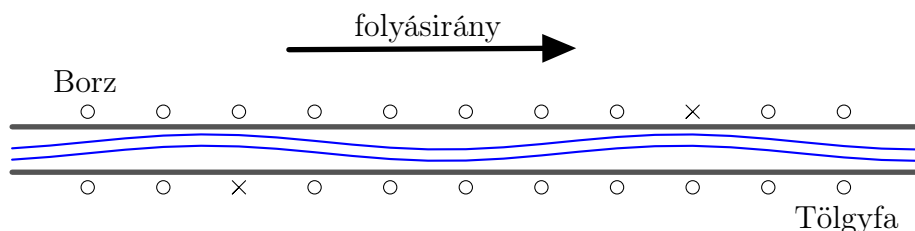
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

4. Nyusztika egy patak két partján ugrál, mindig választva, hogy a patak folyásának irányában ugrik előre 1 métert, vagy átugorja az 1 méter széles patakot, arra merőlegesen, de soha nem ugrik vissza ugyanarra a helyre, ahol már járt. Az alábbi ábrán a körök szemléltetik, hogy Nyusztika az ugrások során hol lehetett. Az ábrán X-szel jelölt helyeken mérges gombák nőnek, ezért Nyusztika ezekre a helyekre nem ugrott. Hányféleképpen juthat el barátjától, a Borztól a Tölgyfáig?



Megoldás. Nevezzük első oszlopnak a legbalra lévő két pontot, ahol tartózkodhat Nyusztika, másodiknak a következő két pontot, és tizenegyediknek azt a két pontot, amelyből az alsó a Tölgyfa.

Hogyan hagyhatja el Nyusztika az első oszlopot? Vagy a fenti vagy a lenti pontból. Az hogy melyikből hagyja el az első oszlopot, az meghatározza, hogy mi volt az előző lépése. Ha a fentiből, akkor csak az lehetett, hogy nem lépte át a folyót, és csak egyet lépett a folyóval párhuzamosan. Ha a lenti pontból, akkor az csak úgy lehetséges, ha előbb átugrott a folyón és aztán lépett egyet jobbra.

Ezt általában is elmondhatjuk, hogy ha nincsenek mérges gombák a közelben. Ha az adott oszlopot ugyanazon az oldalon hagyja el, ahol az előzőt, akkor csak egyet lépett a folyóval párhuzamosan, ha viszont a másik oldalon, akkor előbb átlépte a folyót, majd lépett azzal párhuzamosan egyet jobbra.

Vagyis az első oszlopot kétféleképpen hagyhatja el Nyusztika. A másodikat és a harmadikat csak a fenti pontból a mérges gomba miatt. A következő négyet megint kétféleképpen, majd a nyolcadikat és a kilencediket a mérges gombák miatt csak a lenti pontokból. A tizediket ismét mindkét pontból.

Így összesen 6-szor választhat kétféle lehetőség közül, egymástól függetlenül.

Ez azt jelenti, hogy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ különböző úton juthat el a Tölgyfához.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

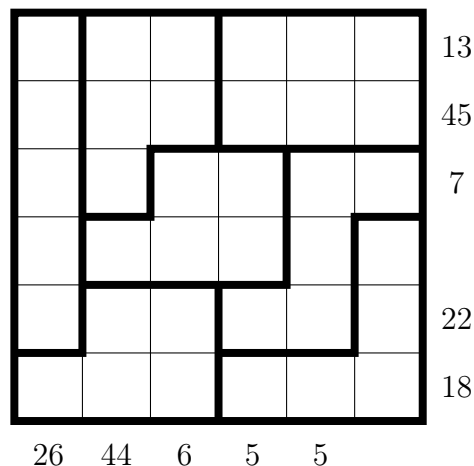
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Írd be az alábbi 6×6 -os négyzet néhány mezőjébe az 1, 2 vagy 3 számokat úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek.

- Minden mezőbe legfeljebb 1 szám kerülhet.
- Minden vastag vonallal körülhatárolt terület-részben az 1, 2 és 3 számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen.
- A sorok és az oszlopok végén lévő számok azt mutatják, hogy ha az adott sorban vagy oszlopban a szomszédos számjegyeket egy számmá olvassuk össze, akkor mennyi ezeknek a számoknak az összege. (A sorokban a számokat balról jobbra, az oszlopokban pedig fentről lefelé olvassuk össze.)



Például, ha egy sorban az alábbi módon helyezkednek el a számok: 1, üres, 3, 2, üres, 3, akkor az összeg $1+3+2+3=36$. Ha egy sor vagy oszlop szélére nincs szám írva, akkor abban a sorban vagy oszlopban nincs megkötés a számok összegére.

A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy helyesen kitöltött táblázat megadása. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik egy helyes kitöltés megtalálását.

Megoldás. Az első oszlopban a felső területen minden szám egyszer jelenik meg, így a 26-os összeg csak úgy tud kijönni, ha egy kétjegyű és két egyjegyű szám összegeként áll elő, ami esetén mindig lesz legalább két darab 2-es a tagok számjegyei közt. Mivel a felső öt mezőben legfeljebb egy darab 2-es lehet, így a bal alsó sarokban is 2-esnek kell lennie. Ezután az alsó sorban az összeg csak a $2+3+13$ módon tud kijönni, és csak ilyen sorrendben, mivel a $2+13+3$ összeg esetén a jobb alsó részben két 3-as lenne. Ekkor a második oszlopot megnézve, a 44 csak két kétjegyű összegeként állhat elő, ahol a második számban az egyesek helyére csak az 1-es kerülhet, így az első szám egyes helyiértékén egy 3-as lesz majd.

Az eddigieket beírva így fog kinézni az ábra (×-szel jelöltük azokat a mezőket, ahova már biztosan nem kerülhet szám):

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

						13
	3					45
	×					7
	1	×		×		22
2	×	3	×	1	3	18
26	44	6	5	5		

Ekkor az ötödik sorban csak a $21+1$ lehet az összeg, aminek az elhelyezkedése az eddig beírt adatokból egyértelmű. Innen az első oszlop első és harmadik helyére fog jönni az 1-es és a 3-as, és ahhoz, hogy az első sorban kijöhessen a 13, mint összeg, az egyesnek kell az első sorban lennie. Ezután a második sor két kétjegyű számból fog állni, aminél az első szám tizes helyiértékén 3-as van, így a második számban a tizes helyiértéken 1-esnek kell lennie.

1						13
×	3		×	1		45
3	×					7
×			×			
2	1	×	1	×	×	22
2	×	3	×	1	3	18
26	44	6	5	5		

Ekkor mivel az ötödik oszlopban a számok összege 5, a negyedik sorban egy 3-asnak kell lennie. Abba a területbe még egy 2-esnek kell jönnie, ami csak a hatodik oszlopba mehet. Így a negyedik sorba még egy 2-esnek kell jönnie, ami csak a negyedik oszlopba jöhet az 5-ös összeg miatt, illetve a negyedik oszlop első sorába is egy kettesnek kell jönnie. Ezután az első sor csak $11+2$ alakban jön ki, majd a második oszlop $13+31$ alakban. A fenti középső területből már csak egy 2-es hiányzik, így a második sor csak $32+13$ alakban állhat elő. Ezután már csak 1 hiányzik a középső területből, ami a harmadik sor negyedik oszlopába fog jönni.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

1	1		2			13
	3	2		1	3	45
3			2		2	7
	3	1		3	2	
2	1		1			22
2		3		1	3	18
26	44	6	5	5		

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ