



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2025. május 31.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Melyek azok a 100-nál kisebb pozitív egészek, amelyekre az alábbi 5 állítás közül pontosan 2 teljesül?

- A számjegyek összege osztható 5-tel.
- A számjegyek összege osztható 6-tal.
- A számjegyek összege osztható 7-tel.
- A számjegyek összege osztható 8-cal.
- Pontosan 3 pozitív egész osztója van.

Megoldás. Egy 100-nál kisebb pozitív egész szám vagy egy-, vagy kétjegyű, így a számjegyeinek összege legfeljebb 18.

Nem lehet, hogy az első négy állítás közül teljesül kettő, hiszen ha a számjegyek összege osztható lenne:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| • 5-tel és 6-tal, akkor 30-cal is. | • 5-tel és 7-tel, akkor 35-tel is. |
| • 5-tel és 8-cal, akkor 40-nel is. | • 6-tal és 7-tel, akkor 42-vel is. |
| • 6-tal és 8-cal, akkor 24-gyel is. | • 7-tel és 8-cal, akkor 56-tal is. |

Mivel a 19-nél kisebb pozitív egészek egyikére sem teljesül egyik fenti állítás sem, így az utolsó állítás biztosan igaz, vagyis a számnak pontosan 3 pozitív osztója van.

Mivel a számnak páratlan sok osztója van, így ha osztópárok szorzataként írjuk fel, akkor az egyik párban két ugyanolyan számnak kell szerepelnie, mert ha nem lenne ilyen, akkor páros sok osztója lenne a számnak. Vagyis a szám biztosan egy négyzetszám.

A 100-nál kisebb pozitív egészek között az 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 és a 81 a négyzetszámok. Ezek közül a 4, 9, 25 és a 49 rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy pontosan 3 osztója van.

A 4-re, a 9-re és a 49-re nem teljesül az első négy állítás közül egyik sem.

A 25-re pontosan egy teljesül az első négy állítás közül, tehát ez az egyetlen szám, amire igaz, hogy az öt állítás közül pontosan kettő teljesül rá.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2. A jobb oldali táblázat minden kis háromszögébe írd be a G, Ö, R betűk valamelyikét úgy, hogy a GÖRÖG szót pontosan

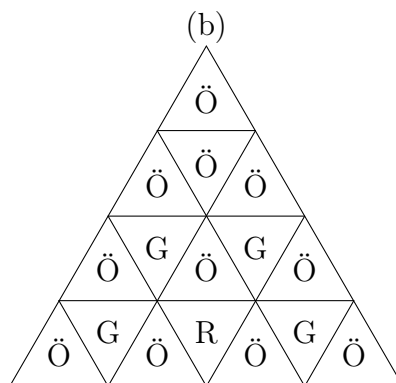
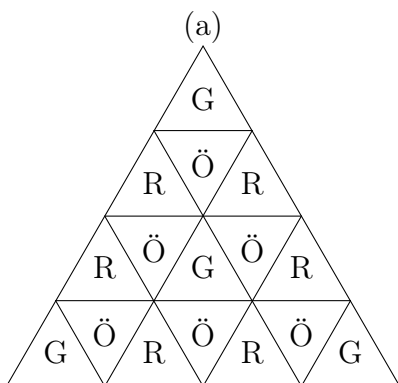
(a) 24-féleképpen

(b) 16-féleképpen

lehesen kiolvasni belőle. Egy kiolvasás során bárhonnan indulhatunk, többször is használhatjuk ugyanazt a mezőt, de mindig csak oldalszomszédos mezőre léphetünk tovább.

A kiadott lapon próbálkozhatsz, a végső megoldásodat az (a) és (b) részre pedig az arra kijelölt háromszögbe írd be. A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy-egy helyesen kitöltött ábra megadása, indoklás nem szükséges. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik a helyes kitöltések megtalálását.

Megoldás. Egy-egy lehetséges kitöltést mutat az alábbi két ábra:



Megjegyzés. Mindkét változatra többféle kitöltés létezik. Egy adott kitöltésnél a kiolvasások megszámlálásához a következő gondolatmenet segít. Minden kiolvasás pontosan egy R betűt tartalmaz. Nézzük meg, hogy egy adott R betűből hányféleképpen lehet egy Ö betűn keresztül G betűbe jutni. Mivel ugyanennyiféleképpen lehet valamely G betűből Ö-n keresztül az adott R-be jutni, és a 'GÖR' illetve 'RÖG' kiolvasása egymástól független, így az adott R betűt használva az előbbi lehetőségek számának négyzete adja a hozzá tartozó különböző kiolvasások számát. Például a fenti (a) ábrán a hat darab R bármelyikéből kétféleképpen juthatunk G-be, tehát $6 \cdot 2^2 = 24$ kiolvasás van, a (b) ábrán pedig az egyetlen R-ből négyféleképpen juthatunk G-be, így a kiolvasások szám $4^2 = 16$.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

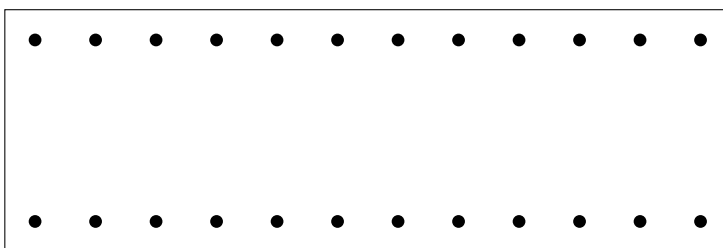
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

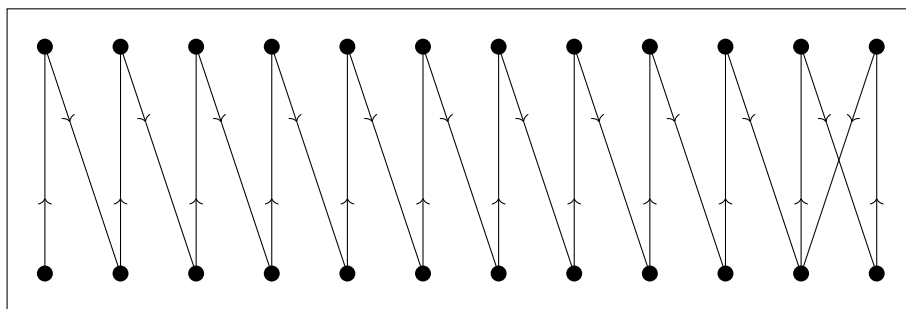
Adószám: 19002457-2-42

3. Mágikus floorballedzést tartanak egy téglalap alakú tornateremben. A játékosok a tornaterem két szemközti oldala mentén helyezkednek el, két párhuzamos sorban. Mindkét sorban 12-12 gyerek áll, és az egy sorban lévő szomszédos játékosok között egyenlőek a távolságok (lásd ábra). Mindenkinél van egy labda, amit a földön gurítva átpasszol valamelyik játékosnak a szemben lévő sorba. A labdákat egyszerre lövik el úgy, hogy minden labda 2 másodperc alatt jutna el a másik sorban álló játékoshoz. (Minden labda sebessége állandó a passz során, és minden labda egyenesen halad.) Azonban, ha néhány labda menet közben egy helyre ér, akkor összeütköznek és mágikus módon eltűnnek. Ha néhány labda egyszerre érkezik meg egy játékoshoz, akkor azok már nem tűnnek el. Legfeljebb hány labda tud így átjutni az átellenes sorba?



Megoldás. Először mutatunk egy példát, ahogyan 22 labda célba érhet, majd bebizonyítjuk, hogy ennél több nem tud átélni a szemközti sorba.

Az alábbi ábrán látható, hogy ha minden gyerek a tőle kiinduló nyíllal jelzett útvonalon passzolja át a labdát, akkor csak két labda ütközik össze, a többi célba ér.



Vizsgáljuk most az előbbi ábrán látható szakaszok felezőpontjait. Ha 23 labda célba érne, akkor ezek egyike sem ütközött, következésképp a 24. labda sem ütközik, így az is átélni a szemközti sorba. Tegyük fel, hogy ez lehetséges. Ekkor, mivel minden labda pontosan 2 másodperc alatt érne át a szemközti sorba, ezért 1 másodperc elteltével minden labda a jelzett felezőpontok valamelyikében lenne. Sőt, bármelyik gyerek bármelyik másikkal passzólna a labdát, ez ugyanúgy igaz lenne. Tehát 1 másodperc után minden labda az alábbi ábrán látható 23 darab x-szel jelzett hely valamelyikén tartózkodna.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

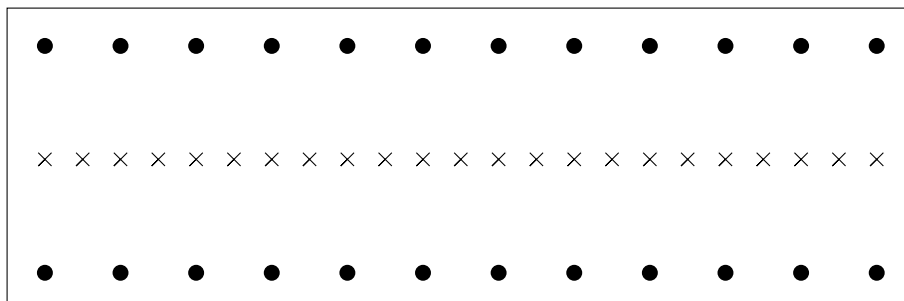
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42



Viszont, mivel csak 23 felezőpont van, így ha korábban nem történik ütközés, akkor 1 másodperc elteltével ezen helyek valamelyikén lesz legalább két labda. Ezek tehát ugyanazon a helyen vannak egyszerre, így nem lehetséges, hogy mindegyik labda célba érjen. Vagyis 22-nél több labda tényleg nem kerülhet át megfelelően a szemközti sorba.

4. Ádámnak van egy kártyapaklija, amelyben minden kártyán egy egyszínű szám szerepel. (Pl. zöld 4-es, vagy narancssárga 12-es.) Ádám kiszámolta néhány esemény esetén, hogy legkevesebb hány kártyát kell véletlenszerűen kihúzni a pakliból ahhoz, hogy biztosan teljesüljenek:

- legyen két különböző kinézetű lap: 7;
- legyen két különböző színű lap: 8;
- legyen két lap, amin különböző szám szerepel: 13;
- legyen két azonos kinézetű lap: 9;
- legyen két azonos színű lap: 6;
- legyen két lap, amin azonos szám szerepel: 3;
- legyen két lap különböző számmal, de azonos színben: 19;
- legyen két lap azonos számmal, de különböző színben: 12.

Legkevesebb hány kártyalap van Ádám paklijában?

Két kártya akkor azonos kinézetű, ha rajtuk ugyanaz a szám ugyanazzal a színnel szerepel.

Megoldás. Ádám ötödik eredménye azt mondja, hogy ha kihúzzunk öt kártyát, előfordulhat, hogy mind különböző színű, de ha húzzunk még egy hatodikat, az ugyanolyan színű lesz, mint valamelyik korábbi. Azaz a kártyák mindegyike ötféle szín valamelyike, jelölje ezeket K, Z, S, P, N.

Hasonló gondolatmenet szerint Ádám hatodik állításából az derül ki, hogy összesen kétféle szám fordul elő a kártyákon. Tegyük fel, hogy ezek a számok az 1 és a 2.

Öt színből és kétféle számból összesen tíz különböző típusú kártyát lehetne készíteni. Készítsünk egy táblázatot, melybe beírjuk, melyik típusból hány darab van.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

	K	Z	S	P	N
1					
2					

Ádám negyedik eredménye szerint van nyolc, páronként különböző kinézetű lap a pakliban, de kilenc már nincs. Ez azt jelenti, hogy a fenti táblázatban pontosan két helyen szerepel 0.

Ádám hetedik eredményéből az derül ki, hogy kiválasztható 18 kártya a pakliból úgy, hogy nincs köztük két lap különböző számmal, de azonos színben. Vegyünk egy ilyen kiválasztást. Ez a 18 lap minden színből csak az egyik fajta számot tartalmazza, tehát a táblázatban a nekik megfelelő legfeljebb öt mezőben szereplő számok összege legalább 18. (Sőt, mivel ez a kiválasztás maximális, pontosan öt mezőt érint, ahol az összeg pontosan 18.)

A fennmaradó mezők közül legfeljebb kettőnek lehet az értéke 0, így további legalább három mezőben pozitív szám szerepel, tehát a táblázatban a számok összege legalább $18 + 3 = 21$. Így Ádám paklija legalább 21 lapos.

Ellenőrizhető, hogy az alábbi táblázatnak megfelelő 21 lapos paklira minden feltétel teljesül.

	K	Z	S	P	N
1	6	5	1	0	0
2	1	1	5	1	1

Van 6 azonos kinézetű lap (K1), de 7 már nincs. ✓

Van 7 azonos színű lap (K), de 8 már nincs. ✓

Van 12 lap azonos számmal (1), de 13 már nincs. ✓

Van 8 különböző kinézetű lap, de 9 már nincs. ✓

Pontosan 5-féle szín és 2-féle szám szerepel a pakliban. ✓ ✓

Kiválasztható 18 lap úgy, hogy nincs köztük különböző szám azonos színben, de 19 már nem: minden színből a kétféle darabszámból a nagyobbát választva (K1, Z1, S2, P2, N2) 18-at kapunk. ✓

Kiválasztható 11 lap úgy, hogy nincs köztük azonos szám különböző színben, de 12 már nem: mindkét számból a legnagyobb darabszámot választva (K1, S2) 11-et kapunk. ✓

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ