



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2025. május 31.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. A jobb oldali táblázat minden kis háromszögébe írd be a G, Ö, R betűk valamelyikét úgy, hogy a GÖRÖG szót pontosan

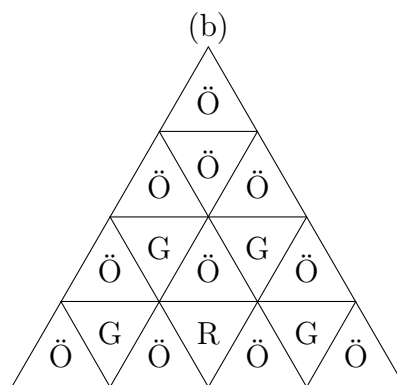
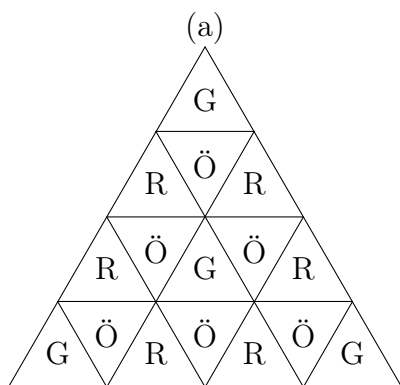
(a) 24-féleképpen

(b) 16-féleképpen

lehesen kiolvasni belőle. Egy kiolvasás során bárhonnan indulhatunk, többször is használhatjuk ugyanazt a mezőt, de mindig csak oldalszomszédos mezőre léphetünk tovább.

A kiadott lapon próbálkozhatsz, a végső megoldásodat az (a) és (b) részre pedig az arra kijelölt háromszögbe írd be. A teljes pontszám eléréséhez elegendő egy-egy helyesen kitöltött ábra megadása, indoklás nem szükséges. Részpontszám járhat olyan érdemi észrevételekért, amelyek segítik a helyes kitöltések megtalálását.

Megoldás. Egy-egy lehetséges kitöltést mutat az alábbi két ábra:



Megjegyzés. Mindkét változatra többféle kitöltés létezik. Egy adott kitöltésnél a kiolvasások megszámlálásához a következő gondolatmenet segít. Minden kiolvasás pontosan egy R betűt tartalmaz. Nézzük meg, hogy egy adott R betűből hányféleképpen lehet egy Ö betűn keresztül G betűbe jutni. Mivel ugyanennyféleképpen lehet valamely G betűből Ö-n keresztül az adott R-be jutni, és a 'GÖR' illetve 'RÖG' kiolvasása egymástól független, így az adott R betűt használva az előbbi lehetőségek számának négyzete adja a hozzá tartozó különböző kiolvasások számát. Például a fenti (a) ábrán a hat darab R bármelyikéből kétféleképpen juthatunk G-be, tehát $6 \cdot 2^2 = 24$ kiolvasás van, a (b) ábrán pedig az egyetlen R-ből négyféleképpen juthatunk G-be, így a kiolvasások szám $4^2 = 16$.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2. Margit három táblára felírt egy-egy számot. Ezután lépésenként a következőt teheti: kiválaszt egy pozitív páros számot a három közül (ha van ilyen), majd azt „szétosztja” a másik két táblára, vagyis a kiválasztott szám helyére 0-t ír, a másik két táblán szereplő számot pedig megnöveli a kiválasztott szám felével. Amikor először előfordul, hogy egyik táblán sincs pozitív páros szám, akkor abbahagyja a játékot. Mi a lehető legkevesebb, illetve lehető legtöbb lépés, amit el tud végezni, ha kezdetben a 0, 0, 64000 számokat írta fel?

Megoldás. Az első két lépés egyértelmű, hiszen először csak a 64000-et tudja szétosztani, így lesz 32000, 32000, 0 a táblákon, ezt követően pedig mindegy, hogy melyik tábláról osztja szét a 32000-et, a megjelenő számok ugyanazok lesznek, mégpedig 48000, 0, 16000.

Vizsgáljuk a táblán szereplő számokat aszerint, hogy mi a legnagyobb kettőshatvány, amivel oszthatóak. Valamelyik táblán mindig 0 szerepel, ez minden kettőshatvánnyal osztható. Az is igaz, hogy a másik két táblán mindig pozitív lesz a szám, hiszen minden lépésnél két nemnegatív számot növelünk.

Az első lépés után a két pozitív szám osztói közül a legnagyobb kettőshatvány a 2^8 . Amikor vesszük egy olyan szám felét, aminek a legnagyobb kettőshatvány osztója 2^8 , akkor az biztos, hogy nem lesz osztható 2^8 -nal, ugyanakkor biztosan osztható 2^7 -nel. Ezt hozzáadva egy 2^8 -nal osztható számhoz, nem kaphatunk 2^8 -nal oszthatót, ám mindenképpen 2^7 többszörösét kapjuk. Tehát a második lépés után a 0-n kívül két olyan pozitív szám szerepel, amelyeknek a legnagyobb kettőshatvány osztója 2^7 -nel.

Hasonlóan végiggondolhatjuk, hogy ha bármelyiket is választjuk ezek közül szétosztásra, akkor annak a felének a legnagyobb kettőshatvány osztója 2^6 , és ezt hozzáadva a másik két számhoz, olyan számokat kapunk, amelyeknek 2^6 a legnagyobb kettőshatvány osztója.

Ugyanez általánosan is elmondható: ha a két pozitív szám osztható 2^k -nal, de nem osztható 2^{k+1} -nel, akkor a fele csak 2^{k-1} -nel lesz osztható, s mivel a másik két szám is osztható volt 2^k -nal, ezért az összeadás után 2^{k-1} -nel osztható, de 2^k -nal már nem osztható számokat fogunk kapni.

Mindezek alapján megállapítható, hogy a táblákon szereplő pozitív számok legnagyobb kettőshatvány osztói minden lépés után egymással megegyeznek, ugyanakkor eggyel kisebb kitevőjű hatványok, mint az előző lépés után. Ha az első lépés után 2^8 volt a legnagyobb kettőshatvány osztó, akkor a nyolcadik lépés után még mindkét pozitív szám páros, ám a kilencedik lépés után már mindkettő páratlan lesz, tehát bárhogy is választja ki Margit, hogy mikor melyik táblán levő számot osztja szét, mindenképpen 9 lépést tud végrehajtani.

3. Samu és Hédi segítenek az anyukájuknak levest főzni. A levesbe virsli is kerül, amit ők szeletelnek karikákra. Samu minden virslit ugyanannyi karikára vág, Hédi azonban nem ennyire precíz. Viszont ő gyorsabb, így összesen négyszer annyi virslit karikáz fel, ehhez tízszer annyi vágást ejt, de csak kilencszer annyi karika kerül ki a kezei közül. Hány karikára vág Samu egy virslit?

Megoldás. Egy virsli szeletelésénél mindig eggyel több karika lesz, mint ahány vágást ejtünk rajta. Jelölje k , hogy hány vágást ejt Samu egy-egy virslin, valamint a , hogy hány virslit szeletel Samu. Mivel minden virsliből $k + 1$ karikát csinál, ezért összesen $a \cdot k$ vágással $a \cdot (k + 1)$ karika kerül ki a kezei közül.

A feladat szövege alapján Hédi $4 \cdot a$ virslit karikáz, $10 \cdot a \cdot k$ vágást ejt, és $9 \cdot a \cdot (k + 1)$ karikát kap. Ugyanakkor a kapott karikák száma úgy is meghatározható, hogy a vágások számához hozzáadjuk az

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

által a szeletelt virslik számát, mivel minden virsliből eggyel több karika lesz, mint ahány vágás esett rajta. Felírható tehát, hogy:

$$9 \cdot a \cdot (k + 1) = 10 \cdot a \cdot k + 4 \cdot a$$

A pozitív a számmal minden tagot eloszthatunk.

$$9 \cdot (k + 1) = 10 \cdot k + 4$$

$$9k + 9 = 10k + 4$$

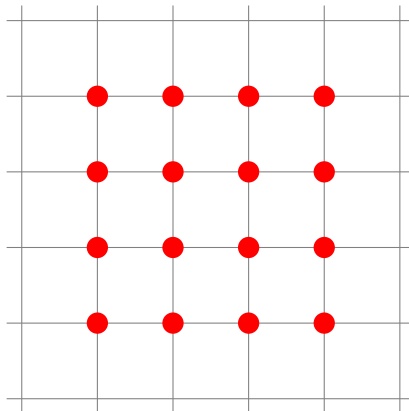
$$5 = k$$

Tehát Samu öt vágást ejt minden virslin, vagyis egy virsli-t hat karikára vág fel.

4. Ingrid néhány rácspontot pirosra színezett a síkon. Azt vette észre, hogy nincs olyan szakasz, amelynek mindkét végpontja piros, és a szakaszon a végpontokon kívül legalább 3 rácspont (nem feltétlenül piros) van. Legfeljebb hány pontot színezhettek pirosra Ingrid?

Rácspont alatt a sík azon pontjait értjük, melyeknek egy rögzített derékszögű koordinátarendszerben mindkét koordinátája egész szám.

Megoldás. 16 pontot meg lehet adni a feltételeknek megfelelően:



Belátjuk, hogy 17 rácspont esetén mindig van legalább kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakaszon legalább 3 rácspont van a két végponton kívül.

Tekintsük a pontok koordinátáit 4-es maradék szerint. Mivel mindkét koordináta 4-es maradéka 4-féle lehet, így a két koordinátát együtt tekintve 16-féle lehet egy pont a 4-es maradékok szerint.

Ha tehát 17 pontot veszünk, akkor a skatulyaelv alapján biztosan van legalább két olyan pont, amelyek 4-es maradék szempontjából megegyeznek.

Tekintsünk két ilyen pontot. Azt állítjuk, hogy két ilyen pont által meghatározott szakasz belsejében van még legalább 3 rácspont.

Legyen az egyik pont $P(a; b)$. Ekkor a másik pontot felírhatjuk $Q(a + 4m; b + 4n)$ alakban, hiszen ha egyforma a megfelelő koordináták 4-es maradéka, akkor az azt jelenti, hogy a különbségük osztható 4-gyel.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

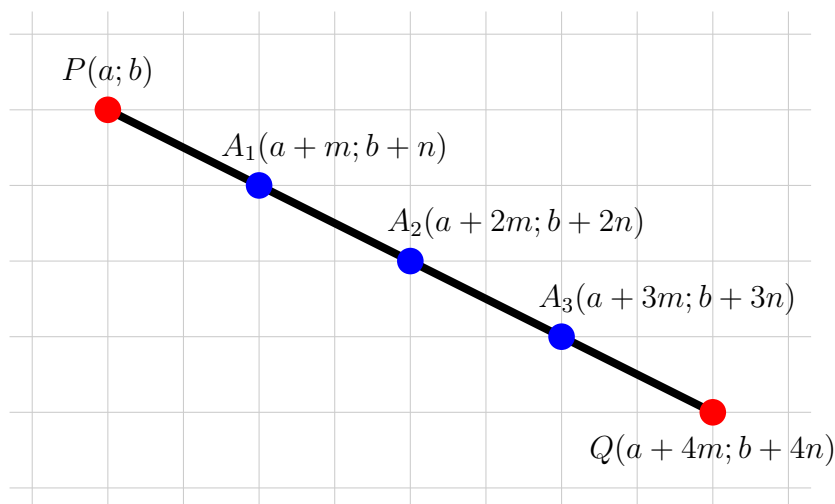
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Ez viszont azt is jelenti, hogy az $A_1(a+m; b+n)$, $A_2(a+2m; b+2n)$ és $A_3(a+3m; b+3n)$ pontok rácspontok, hiszen minden koordinátájuk egész. Ráadásul ezek mind a PQ szakasz belsőjében vannak. Az alábbi ábra szemlélteti is ezt abban az esetben, ha $m=2$ és $n=-1$.



A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ