



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

54. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2025. május 30.

NYOLCADIK OSZTÁLY

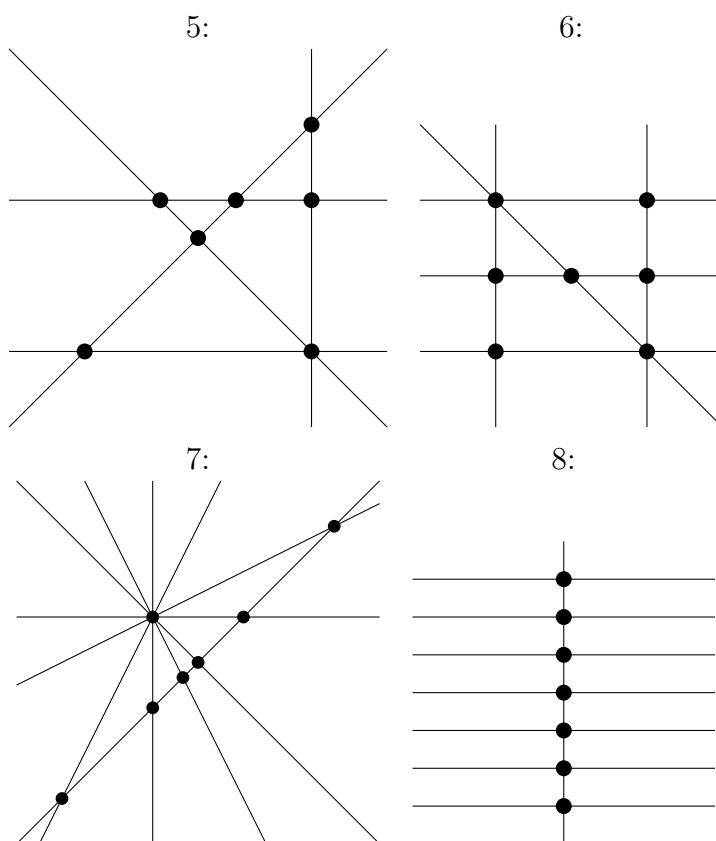
MEGOLDÁSOK

1. Varázsmánónak 8 egyenese van. Ezek közül néhányat lerakott a síkra úgy, hogy a lerakott egyenesek metszéspontjainak száma pontosan 7 lett. Hány egyenest tehetett a síkra Varázsmánó?

A lehetséges értékekhez készíts egy-egy megfelelő ábrát! Ami nem lehetséges, azt indokold, hogy miért nem!

Megoldás. Legalább 5 egyenest kell használnia Varázsmánónak. Ha legfeljebb 4 egyenest használ, akkor azoknak legfeljebb 6 metszéspontjuk lehet, hiszen ha bármely két egyenesnek van metszéspontja, akkor az $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ metszéspont.

Az alábbi ábrák mutatják, hogy az 5, 6, 7, 8 mind lehetséges esetek.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKEEZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

2. Egy 200000-nél kisebb köbszámot elosztottam egy négyzetszámmal, így 12-t kaptam. Mi lehetett a köbszám?

Köbszámnak nevezzük azt a számot, amely egy egész szám harmadik hatványa.

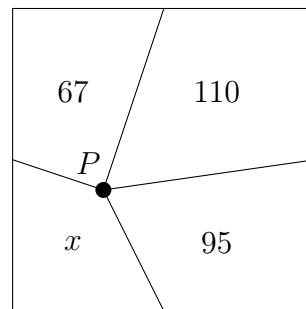
Például $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ köbszám.

Megoldás. Meggondolható, hogy egy köbszám prímtényezős felbontásában minden prímtényezőnek a kitevője hárommal osztható. Ha egy számot egy osztójával elosztunk, akkor a végeredményt úgy is megkaphatjuk, hogy a prímtényezős felbontásában minden prímtényezőnek a kitevőjét annyival csökkentjük, amennyi az osztóban az adott prímtényezőnek a kitevője. Mivel jelen esetben egy négyzetszámmal osztunk, így ez éppen azt jelenti, hogy a kitevőket páros számmal csökkentettük (hiszen minden négyzetszámban az összes prímtényező kitevője páros).

Eredményül 12-t kaptunk, ennek prímtényezős alakja $2^2 \cdot 3^1$. Tehát a 2-t és az 1-et is meg kellett kapnunk úgy, hogy egy hárommal osztható számot páros számmal csökkentettünk. Ezen kívül lehetett volna az eredeti számnak a 2-től és 3-tól különböző prímtényezője is, azonban ennek a kitevője legalább 6 kellett volna, hogy legyen, hiszen ez is hárommal osztható, de páros számmal csökkentve lenne 0.

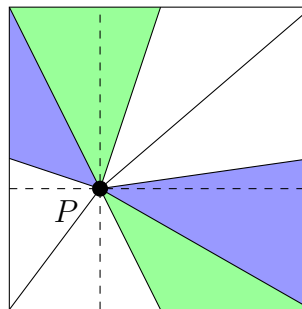
A lehető legkisebb kiinduló szám az előzőek alapján a $2^6 \cdot 3^3 = 1728$. Más megfelelő számot úgy kaphatunk, ha egy egész szám hatodik hatványával szorozzuk ezt, ezek közül a legkisebb az $1728 \cdot 2^6 = 110592$, ami még jó, ám becslésekkel megkapható, hogy minden más köbszám már túl nagy lesz, hiszen már a 3^6 -nal való szorzás is túl nagy eredményre vezet ($1728 \cdot 3^6 > 1000 \cdot 3^3 \cdot 3^3 > 1000 \cdot 20 \cdot 20 = 400000$). Tehát a keresett köbszám lehetett 1728 vagy 110592.

3. Egy négyzetben felvettünk egy P pontot, majd ezt összekötöttük a négy oldalfelező ponttal. Így négy olyan konvex négyszöget kaptunk, amelyek területe cm^2 -ben mérve rendre 67, 110, 95 és x . (Ld. ábra.)
Hány cm a négyzet oldala?



Megoldás. Ha a P pontot összekötjük a négyzet négy csúcsával, akkor mind a négy kis négyszög két háromszögre bomlik. Minden ilyen háromszögnek van egy $\frac{n}{2}$ -hosszú oldala, ahol n jelöli a négyzet oldalhosszát. Ezen háromszögek segítségével tudjuk megvizsgálni a négyszögek területét.

Vegyük észre, hogy a 67, illetve a 95 cm^2 területű négyszögek négy olyan háromszögből állnak össze, melyek közül kettő a négyzet vízszintes oldalaira illeszkedik, és a vízszintes oldalhoz tartozó magasságaik n -re egészítik ki egymást, kettő pedig a négyzet függőleges oldalaira illeszkedik, és a függőleges oldalaihoz tartozó magasságaik szintén n -re egészítik ki egymást.



A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

Tehát a területeik együttléve:

$$67 + 95 = \frac{\frac{n}{2} \cdot n}{2} \cdot 2 = \frac{n^2}{2}$$

Ebből következően a négyzet területe $2 \cdot (67 + 95) = 324 \text{ cm}^2$, oldalának hossza pedig $\sqrt{324} = 18 \text{ cm}$. (Az is kiderült ezáltal, hogy $x = 52$.)

4. Egy különböző pozitív egészeket tartalmazó, nem üres H halmaz elemeit két egyenlő elemszámú csoportba lehet osztani úgy, hogy a két csoportban lévő számok összege is egyenlő, és a két csoportban lévő számok szorzata is egyenlő.

Legkevesebb hány eleme lehet a H halmaznak?

Megoldás. Legkevesebb 6 eleme lehet H -nak.

Először megmutatjuk, hogy ez lehetséges, két példán keresztül:

- $H = \{1, 2, 3, 9, 10, 15\}$. A felbontás pedig: $A = \{1, 9, 10\}$ és $B = \{2, 3, 15\}$. Mindkét halmazban az elemek összege 20, a szorzata pedig 90.
- $H = \{1, 2, 3, 8, 12, 16\}$. A felbontás pedig: $A = \{1, 8, 12\}$ és $B = \{2, 3, 16\}$. Mindkét halmazban az elemek összege 21, a szorzata pedig 96.

H nyilván nem lehet 2-elemű.

H nem lehet 4-elemű sem. Tegyük fel, hogy $H = \{a, b, c, d\}$ és az $A = \{a, b\}$ és $B = \{c, d\}$ felbontás megfelelő. Ekkor legyen $N = a + b = c + d$. Vagyis tudjuk, hogy $b = N - a$ és $d = N - c$. Felhasználva, hogy a két halmaz elemeinek a szorzata egyenlő, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}a(N - a) &= c(N - c) \\aN - a^2 &= cN - c^2 \\(a - c)N &= a^2 - c^2 = (a + c)(a - c) \\N &= a + c.\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben leoszthatunk $a - c$ -vel, hiszen $a \neq c$, így $a - c \neq 0$. De az nem lehet, hogy $N = a + c$, hiszen $N = a + b$ miatt ez azt jelentené, hogy $b = c$, ami nem megengedett.

Mivel H elemszáma páros, így legkevesebb 6 eleme lehet, amire mutattunk is példát.

2. megoldás. H nyilván nem lehet 2-elemű. Megmutatjuk, hogy 4-elemű sem lehet.

Tegyük fel, hogy $H = \{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. Ekkor két azonos kéttagú összeget csak úgy kaphatunk H elemeiből, ha $a + d = b + c$. Legyen $k = b - a = d - c > 0$. Az ad szorzatnál a $bd = (a + k)d$ szorzat kd -vel nagyobb, a bd szorzatnál az $bc = b(d - k)$ szorzat viszont kb -vel kisebb. Mivel $b < d$, így $kb < kd$, tehát bc nagyobb ad -nél (még hozzá $(kd - kb)$ -vel). Így egy 4-elemű H halmaznak nem létezhet jó felosztása.

6-elemű H halmazra az 1. megoldás mutat példát.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ



TIT - Kalmár László
Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.

Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176

E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu

Honlap: <https://www.kalmarverseny.hu>

Adószám: 19002457-2-42

5. Leila egy 6×6 -os táblázat mezőit tölti ki számokkal a következő módon: tetszőlegesen választ egy üres mezőt és beírja oda a legkisebb pozitív egész számot, ami még nem szerepel sem az adott mező sorában, sem az oszlopában.

Melyik a legnagyobb szám, amely bekerülhet így a táblázatba?

Megoldás. Vizsgáljuk meg Leila egy tetszőleges kitöltését. Minden sorban és minden oszlopban egy szám legfeljebb egyszer szerepelhet, így minden szám ugyananyi sorban és oszlopban fog szerepelni. Ebből következik, hogy ha valamelyik sorban nem lenne 1-es, akkor lenne egy oszlop, ahol szintén nincs 1-es, viszont akkor ennek a sornak és oszlopnak a kereszteződésébe 1-esnek kellett volna kerülnie. Vagyis minden sorban és oszlopban lesz 1-es.

Bármely mező sorában és oszlopában a kitöltéskor összesen legfeljebb 10 különböző szám van, így Leila 11-nél nagyobb számot biztosan nem ír be. Ha valahova 11-et írna, akkor a sorában és oszlopában együttvéve 1-től 10-ig minden számnak szerepelnie kéne a fennmaradó tíz helyen. Ekkor azonban vagy a sorában, vagy az oszlopában nem lenne 1-es számjegy, ami lehetetlen.

A szóba jövő legnagyobb szám így a 10. Leila el tudja érni, hogy szerepeljen a 10-es szám a táblázatában, például az alábbi ábrán látható kitöltéssel. Ezt úgy hozza létre, hogy először beírja az 1-eseket, aztán a 2-eseket, és így tovább, növekvő sorrendben haladva a számokon.

1	2	3	4	5	6
5	1	2	3	4	7
4	5	1	2	3	8
3	4	5	1	2	9
2	3	4	5	1	10
6	7	8	9	10	1

A feladatokat összeállította: Juhász Péter, Károlyi Gergely, Nagy Kartal, Szepessy Luca.

Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

A 201108/03508. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-24-0114. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.



Nemzeti
Kulturális
Alap



Nemzeti Tehetség
Program



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM



NEMZETI KULTURÁLIS
TÁMOGATÁSKÉZELŐ