



55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2026. március 20.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Alex, Blanka, Csenge, Dénes, Emma és Fábi mindannyian vagy igazmondók, vagy hazudósok. Az előbbiek mindig igazat mondanak, az utóbbiak mindig hazudnak. Az alábbiakat mondták:

- Alex: Legalább 4 igazmondó van közöttünk.
- Blanka: Egyetlen igazmondó sincs közöttünk.
- Csenge: Pontosan 2 igazmondó van közöttünk.
- Dénes: Pontosan 5 igazmondó van közöttünk.
- Emma: Legfeljebb 3 igazmondó van közöttünk.
- Fábi: Pontosan 1 igazmondó van közöttünk.

Kik az igazmondók?

Megoldás. Blanka hazudós, hiszen egy igazmondó nem állíthatja, hogy nincs közöttük igazmondó. Csenge, Dénes és Fábi közül legfeljebb egy lehet igazmondó, vagyis Blankával együtt legalább három hazudós van a hat ember között.

Emiatt Alex és Dénes biztosan hazudós, hiszen legfeljebb 3 igazmondó lehet.

Emma pedig ugyanezért biztosan igazmondó.

Ha Fábi igazat mondana, akkor Emmával együtt már legalább ketten mondanának igazat, tehát Fábi nem lehet igazmondó.

Így Csenge igazat mond, hiszen különben Fábinak is igaza lenne.

Tehát 2 igazmondó van, Csenge és Emma.

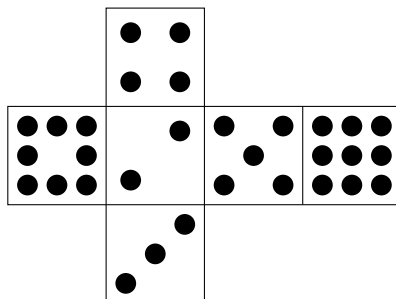




2. Egy dobozban azonos méretű dobókockák vannak, amelyek hálója az alábbi ábrán látható. Ingrid és Tasziló is épített egy-egy 10-szintes dobókockatornyot a padlóra ezekből. A tornyok minden szintje pontosan egy kockából állt és az egymásra rakott kockák teljes lappal érintkeztek.

Ingrid olyan tornyot épített, amin a lehetséges legtöbb pötty látszott, Tasziló pedig olyat, amin a lehető legkevesebb.

Mennyivel több pötty látszódott Ingrid tornyán?



Megoldás. Egy torony első kilenc kockájából pontosan négy lap fog látszódni. A nem látszódó lapok egymással szemben helyezkednek el.

Az egymással szemközti lapok és összegeik: $4 + 3 = 7$, $8 + 5 = 13$, $2 + 9 = 11$.

Tasziló tornyán a $8 + 5$ -ös lappár lesz takarásban, Ingridén pedig az $4 + 3$ -as az első kilenc kocka esetén. Ez szintenként $13 - 7 = 6$ pötty különbség, összesen $9 \cdot 6 = 54$.

A tizedik kockából öt lap fog látszódni. Taszilóén a kilences lesz takarásban, Ingridén pedig a kettes. Ez még 7 pöttynyi különbség. Tehát összesen $54 + 7 = 61$ pöttyel több fog látszódni Ingrid tornyán.

Megjegyzés. Ingrid tornyán $9 \cdot 24 + 29 = 245$ pötty fog látszódni, Taszilóén pedig $9 \cdot 18 + 22 = 184$.

3. Egy teremben két teljesen egyforma téglalap alakú szőnyeg fekszik a padlón. Kezdetben nincs átfedés köztük, ekkor a terem padlójából 62 négyzetmétert nem fed szőnyeg. Ezután az egyiket keresztben ráhelyezzük a másikra úgy, hogy a hosszabb oldalak egymásra merőlegesek, és túl is lógnak egymáson mind a négy irányban. Ekkor a padlóból 71 négyzetmétert nem borít szőnyeg. Végül az egyiket kivisszük, így a teremben már 86 négyzetméteren nincs szőnyeg.

Hány méter hosszúak a szőnyegek oldalai?

1 négyzetméter (m^2) az 1 méter oldalú négyzet területével egyenlő.

Megoldás. A kezdeti és a végső helyzet között $86 - 62 = 24$ négyzetméterrel nőtt a szőnyeggel nem fedett terület. Ez éppen egy szőnyeg területével egyenlő. (A terem így $86 + 24 = 110$ négyzetméter alapterületű.)

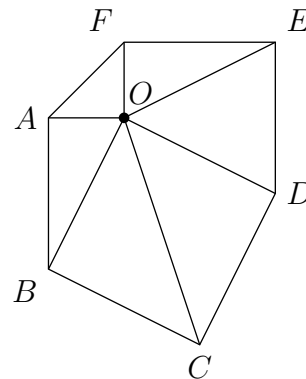
Amikor keresztben egymásra helyezzük őket, akkor a szőnyegek által kétszeresen lefedett terület egy négyzet lesz, amelynek oldala megegyezik a szőnyegek rövidebb oldalával.

Mivel a kezdeti állapothoz képest a nem fedett rész $71 - 62 = 9$ négyzetméterrel nőtt, éppen ennyi a kétszeresen fedett négyzet területe.

Így a négyzet oldalának, vagyis a szőnyeg rövidebb oldalának 3 méter hosszúnak kell lennie.

A hosszabb oldal ezért $24 : 3 = 8$ méter hosszú.

4. Gergő rajzolt egy hatszöget, ennek csúcsait A, B, C, D, E, F betűkkel jelölte az ábra szerint. A hatszög belsejében lévő O pontot összekötötte a csúcsokkal, így hat kis háromszög keletkezett. Gergő szeretné az általa rajzolt 12 szakaszt mindegyikét pirossal vagy kézzel kiszínezni (egy szakaszt egyféle színnel) úgy, hogy mind a hat háromszögnek két piros és egy kék oldala legyen. Hány ilyen színezés van?

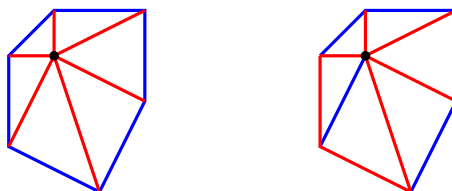


Megoldás. Ha kiszínezzük az O -ból induló szakaszokat megfelelően, akkor azok meghatározzák a hatszög oldalainak a színeit is. Ha az adott háromszög egyik oldala már kék, akkor a hatszög megfelelő oldala csak piros lehet, ha pedig a háromszög mindkét O -ból induló oldala piros, akkor a megfelelő hatszög-oldalnak kéknek kell lennie.

Az O -ból induló hat szakaszt kell tehát kiszíneznünk úgy, hogy két „szomszédos” szakasz nem lehet kék.

Emiatt az O -ból induló kék szakaszok száma legfeljebb 3. Tekintsük át az eseteket ezen kék szakaszok száma szerint:

- Ha ez 0, akkor egyetlen módon tudjuk jól megszínezni a szakaszokat (ld. a bal oldali ábrán).

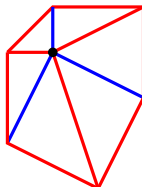


- Ha ez 1, akkor az 6-féle színezés lehet, hiszen az O -ból induló 6 szakasz közül kell választanom egyet (egy példa látható a jobb felső ábrán).
- Ha ez 2, akkor az 9-féle színezés lehet, hiszen az O -ból induló 6 szakasz közül kell választanom kettőt úgy, hogy ne legyenek szomszédosak. Az elsőt 6-féleképpen választhatom, a másodikat 3-féleképpen, és a sorrendjük nem számít, így $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ megfelelő színezés van.



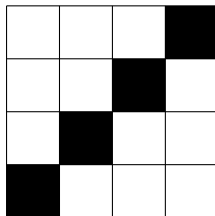


- Ha ez 3, akkor felváltva kell az O -ból induló szakaszokat kékre és pirosra színezni, így összesen kétféle színezés lehetséges:



Ez összesen $1 + 6 + 9 + 2 = 18$ megfelelő színezés.

5. Egy 4×4 -es táblázatban az egyik átló mezőit feketére színeztük az ábrán látható módon:



A 12 fehér mezőbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 számok közül szeretnénk 12 különbözőt elhelyezni úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban ugyanannyi legyen a számok összege.

Mi lehet a kimaradó szám?

Minden lehetőséghez adj meg egy jó kitöltést és bizonyítsd be, hogy más szám kihagyása esetén nem tölthető ki megfelelően a táblázat.

Megoldás. Ha minden sorban egyenlő a számok összege, akkor ez azt jelenti, hogy a beírt számok összege osztható 4-gyel.

Az első 13 szám összege: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 91$. Ha azt akarjuk, hogy 12 szám összege 4-gyel osztható legyen, akkor csak a 3-at, 7-et vagy 11-et hagyhatjuk el. (Ekkor az összegek rendre 88, 84 és 80 lesznek, minden egyéb esetben az összeg nem osztható 4-gyel.)

Mindhárom esetben lehetséges a számok megfelelő beírása:

A 3-at kihagyva:

13	5	4	
1	10		11
8		12	2
	7	6	9

A 7-et kihagyva:

12	8	1	
5	3		13
4		11	6
	10	9	2

A 11-et kihagyva:

1	9	10	
13	4		3
6		2	12
	7	8	5

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

