TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2026. március 21.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. V. Ödön király kiszámította az alábbi, 55 számot tartalmazó műveletsor eredményét, amelyben felváltva szerepelnek kivonások és összeadások:

$$5 - 55 + 555 - 5555 + 55555 - 555555 + \ldots - \underbrace{55555\ldots55555}_{\text{54 darab számjegy}} + \underbrace{55555\ldots55555}_{\text{55 darab számjegy}}$$

Hány 5-ös számjegy van az eredményül kapott számban?

Megoldás. A műveletsorban minden páratlan sorszámú tag előjele pozitív, a páros sorszámúaké pedig negatív. Csoportosítsuk a tagokat az alábbi módon:

$$(5) + (-55 + 555) + (-5555 + 55555) + \ldots + (-\underbrace{55555\ldots55555}_{\text{54 darab számjegy}} + \underbrace{55555\ldots55555}_{\text{55 darab számjegy}})$$

Ekkor a zárójelezett részekben a műveletek eredménye: 5, 500, 50000, ..., $\underbrace{500\ldots000}_{\text{55 darab számjegy}}$

Ezek mind különböző, páratlan sok számjegyből álló számok, amelyeknek az első számjegyük ötös, a többi nulla.
Ezeket összegezve, sehol sem lesz tízesátlépés, ezért eredményként egy olyan 55-jegyű számot kapunk, amelyben minden páratlanadik helyi értéken ötös számjegy fog állni, a párosokon pedig nulla. 1-től 55-ig 28 darab páratlan szám van, tehát 28 darab ötös van az eredményül kapott számban.

2. Egy kétkarú mérleg serpenyőiben piros és kék súlyok vannak. (Mindkét serpenyőben legalább 20 darab piros és legalább 20 darab kék súly.) Az azonos színű súlyok azonos tömegűek. A mérleg kezdetben egyensúlyban volt. Ezt követően 3 piros súlyt áttettem a bal serpenyőből a jobb serpenyőbe, majd feltettem 4 kék súlyt a bal serpenyőbe, így a mérleg újra egyensúlyba került. Ha most ezt a 4 kék súlyt áttenném a bal serpenyőből a jobb serpenyőbe, akkor hány piros súlyt kellene levennem a jobb serpenyőből, hogy egyensúlyba kerüljön a mérleg?

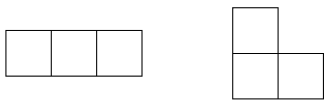
Megoldás. Azzal, hogy 3 piros súlyt átteszünk, a bal oldali serpenyő ennyivel könnyebb, a jobb oldali serpenyő ennyivel nehezebb lett. Tehát összesen $3 + 3 = 6$ piros súlynyi különbözet keletkezik – ennyivel lesz nehezebb a jobb serpenyő a balnál.
Ezt éppen kiegyenlíti a 4 kék súly, tehát 4 kék súly tömege ugyanannyi, mint 6 piros súlyé.
Hasonlóan, amikor a 4 kék súlyt tesszük át balról jobbra, az $4 + 4$ kék súlynyi többletterhet jelent a jobb serpenyő számára a bal serpenyőhöz képest.
Ezt pedig $6 + 6 = 12$ piros súly elvételével tudjuk kiegyenlíteni.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

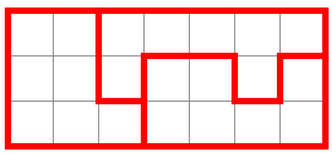
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

3. Egy 3×7-es téglalapot a rácsvonalak mentén egynél több összefüggő részre osztottunk úgy, hogy minden rész területe egyenlő. Hány részre oszthattuk a téglalapot, ha minden rész kerülete különböző? Adj példát minden lehetséges darabszámra és indokold, hogy más darabszám nem lehetséges.

Megoldás. A téglalap területe 21, így minden rész területe osztója 21-nek, hiszen minden rész területe egyenlő.
Ezért a részek területe csak 1, 3, vagy 7 lehet, hiszen ha 21 lenne, akkor csak egy rész lenne, más osztója pedig nincs a 21-nek.
1 nem lehet egy rész területe, mert akkor csupa 1×1-es négyzetre kellett volna felvágnunk a téglalapot, de ezeknek a kerülete ugyanakkora.
3 sem lehet egy rész területe, mert 3 kis négyzetből álló alakzatból csak kétféle van, ha az egymásba forgathatókat, tükrözhetőket egyformának tekintjük:



A felosztáshoz viszont 7 db, páronként különböző kerületű ilyen alakzat kellene.
7 lehet a részek területe, az ábrán egy lehetséges felosztást mutatunk:



A bal oldali alakzat kerülete 12, a jobb alsó alakzaté 14, a jobb felső kerülete pedig 16.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

4. Alina választ egy négyjegyű pozitív egész számot, amelynek minden számjegye különböző. A kiinduló számot leírja a papírra, ez az első sor. A szomszédos számjegyek alá leírja a különbségüket, így kapja a második sort. Ennek a sornak a szomszédos számjegyei alá is leírja a különbségeiket, így kapja a harmadik sort. Végül ennek a számjegyei alá is leírja a különbségüket, így kapja a negyedik sort, amely csak egyetlen számjegyet tartalmaz. Alina a különbségek számításánál eltérő számjegyek esetén mindig a nagyobból vonja ki a kisebbet. Egy példa látható a jobb oldalon.

3572
225
03
3

(a) Tud-e olyan kiinduló számot választani Alina, hogy a harmadik sorban legyen 9-es?

(b) Melyek azok a kiinduló számok, amelyekre a negyedik sorban 8-ast kap Alina?

Megoldás. (a) A kilences csak a $9-0$ eredményeként jöhet ki. Tehát, ha a harmadik sorban szerepel 9-es, akkor a második sorban biztosan szerepel a nulla.
A nulla viszont csak két egyforma számjegy kivonásával keletkezhet, de akkor az első sorban nem lenne minden számjegy különböző. Tehát a harmadik sorban nem lehet kilences. (***2** pont*)

(b) Három ilyen szám van:

9012	**7890**	**2109**
911	119	119
80	08	08
8	8	8

(***3** pont*)

A 8 csak $9-1$ vagy $8-0$ eredménye lehet, de láttuk, hogy a harmadik sorban nem lehet 9-es, így csak 80 vagy 08 lehet ez a sor.
Ekkor viszont a második sor csak 199, 991, 119 vagy 911 lehet. De ha a második sorban lenne két 9-es, akkor az első sorban kellene lennie két 9-esnek vagy két 0-nak, ami lehetetlen. Tehát a második sorban 911 vagy 119 áll.
Mivel négyjegyű szám nem kezdődhet nullával, ezért csak az alábbi lehetőségek jöhetnek szóba: 9012, 7890, 2109.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.