TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

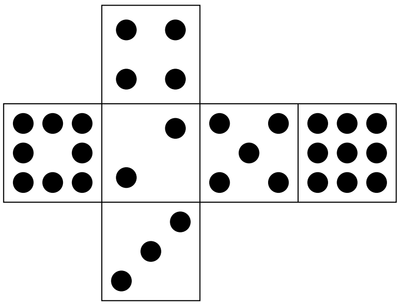
55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2026. március 20.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy dobozban azonos méretű dobókockák vannak, amelyek hálója az alábbi ábrán látható. Ingrid és Tasziló is épített egy-egy 10-szintes dobókockatornyot a padlóra ezekből. A tornyok minden szintje pontosan egy kockából állt és az egymásra rakott kockák teljes lappal érintkeztek.
Ingrid olyan tornyot épített, amin a lehetséges legtöbb pötty látszott, Tasziló pedig olyat, amin a lehető legkevesebb.
Mennyivel több pötty látszódott Ingrid tornyán?

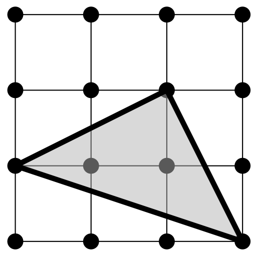


Megoldás. Egy torony első kilenc kockájából pontosan négy lap fog látszódni. A nem látszódó lapok egymással szemben helyezkednek el.
Az egymással szemközti lapok és összegeik: $4+3=7$, $8+5=13$, $2+9=11$.
Tasziló tornyán a $8+5$-ös lappár lesz takarásban, Ingridén pedig az $4+3$-as az első kilenc kocka esetén.
Ez szintenként $13-7=6$ pötty különbség, összesen $9\cdot 6=54$.
A tizedik kockából öt lap fog látszódni. Taszilóén a kilences lesz takarásban, Ingridén pedig a kettes.
Ez még 7 pöttynyi különbség. Tehát összesen $54+7=61$ pöttyel több fog látszódni Ingrid tornyán.

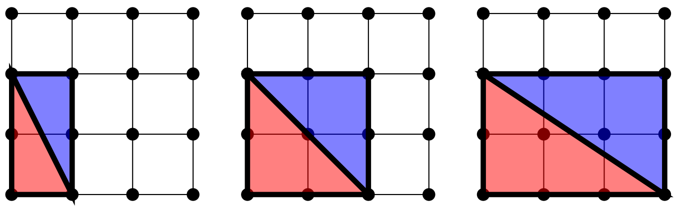
Megjegyzés. Ingrid tornyán $9\cdot 24+29=245$ pötty fog látszódni, Taszilóén pedig $9\cdot 18+22=184$.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

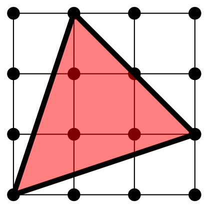
2. Vali egy négyzethálós füzetben kijelölt 16 rácspontot az ábra szerinti elrendezésben. Ezután rajzolt egy háromszöget, melynek mindhárom csúcsa a 16 rácspont közül való, és a területe egész számú rácsnégyzet területével egyezik meg.
Mekkora területű háromszögeket alkothatott így Vali? Rajzolj egy-egy példát minden lehetséges értékre. Írd le, hogy hogyan számoltad ki a háromszögek területét.
Nem kell bizonyítanod, hogy nincs többféle lehetőség.
Az ábrán látható háromszög nem megfelelő, mert a területe 2,5.



Megoldás. Egy ilyen háromszög területe 1, 2, 3 vagy 4 lehet.
Például úgy kaphatunk 1, 2, illetve 3 területű rácsháromszöget, ha egy 2×1-es, egy 2×2-es, illetve egy 2×3-as téglalapot elfelezünk egy átlója mentén (bármelyik felet választhatjuk):



A terület ilyenkor persze a téglalap területének a fele.
Az alábbi ábrán látható piros háromszög területe 4.



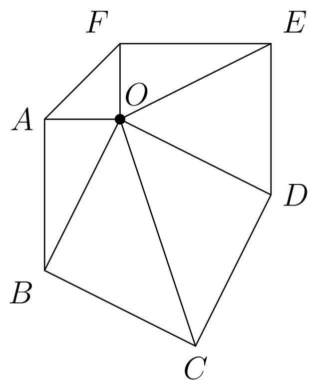
A területe azért 4, mert megkapható úgy, hogy a teljes 3×3-as négyzetből levágjuk egy 3×1-es, illetve egy 1×3-as téglalap felét, és még egy 2×2-es négyzet felét is. Így a megmaradt terület:

$$9 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = 4.$$

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

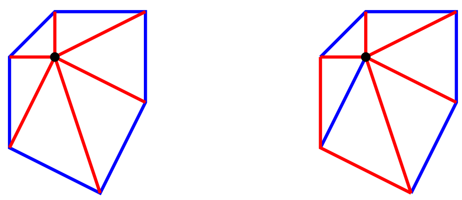
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

3. Gergő rajzolt egy hatszöget, ennek csúcsait A, B, C, D, E, F betűkkel jelölte az ábra szerint. A hatszög belsejében lévő O pontot összekötötte a csúcsokkal, így hat kis háromszög keletkezett.
Gergő szeretné az általa rajzolt 12 szakasz mindegyikét pirossal vagy kékkel kiszínezni (egy szakaszt egyféle színnel) úgy, hogy mind a hat háromszögnek két piros és egy kék oldala legyen.
Hány ilyen színezés van?



Megoldás. Ha kiszínezzük az O-ból induló szakaszokat megfelelően, akkor azok meghatározzák a hatszög oldalainak a színeit is. Ha az adott háromszög egyik oldala már kék, akkor a hatszög megfelelő oldala csak piros lehet, ha pedig a háromszög mindkét O-ból induló oldala piros, akkor a megfelelő hatszög-oldalnak kéknek kell lennie.
Az O-ból induló hat szakaszt kell tehát kiszíneznünk úgy, hogy két „szomszédos" szakasz nem lehet kék.
Emiatt az O-ból induló kék szakaszok száma legfeljebb 3. Tekintsük át az eseteket ezen kék szakaszok száma szerint:

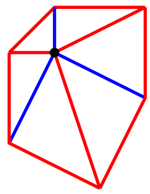
- Ha ez 0, akkor egyetlen módon tudjuk jól megszínezni a szakaszokat (ld. a bal oldali ábrán).



- Ha ez 1, akkor az 6-féle színezés lehet, hiszen az O-ból induló 6 szakasz közül kell választanom egyet (egy példa látható a jobb felső ábrán).
- Ha ez 2, akkor az 9-féle színezés lehet, hiszen az O-ból induló 6 szakasz közül kell választanom kettőt úgy, hogy ne legyenek szomszédosak. Az elsőt 6-féleképpen választhatom, a másodikat 3-féleképpen, és a sorrendjük nem számít, így $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ megfelelő színezés van.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

- Ha ez 3, akkor felváltva kell az O-ból induló szakaszokat kékre és pirosra színezni, így összesen kétféle színezés lehetséges:



Ez összesen $1 + 6 + 9 + 2 = 18$ megfelelő színezés.

4. Egy szobában három gép van, amelyek időnként rövid, de feltűnő zajokat keltenek. Az első gép bekapcsolás után 20 másodpercenként berreg egyet, a másik 42 másodpercenként morajlik, a harmadik pedig 75 másodpercenként csipog. A berregés, a morajlás és a csipogás is pontosan 1 másodpercig tart. Két egymást követő zaj között eltelt időt csendes időszaknak nevezzük. Így például a második berregés végétől az első morajlásig 1 másodpercig tartó csendes időszak van. A három gépet pontosan ugyanakkor kapcsolják be, és onnantól kezdve éjjel-nappal működnek.
Van-e pontosan 10 másodperc hosszúságú csendes időszak?

Megoldás. Nincs 10 másodperces csendes időszak.
Mivel minden zaj 1 másodpercig tart, ezért ha lenne 10 másodperces csendes időszak, akkor az azt jelentené, hogy van két olyan zaj, amik egymástól számítva 11 másodpercre kezdődnek.
Ugyanannak a gépnek nem lehet ez a zaja, hiszen a gépek 20, 42 és 75 másodpercenként zajonganak. Nem lehet két különböző gép zajának kezdete sem 11 másodpercre egymástól.

- Az első két gépé azért nem, mert 20 és 42 is osztható 2-vel, így ezek a gépek páros másodpercekben kezdenek zajongani, amiknek a távolsága csak páros lehet, így nem lehet 11.
- A második és a harmadik gép 42 és 75 másodpercenként szólal meg, vagyis mindkettő 3-mal osztható másodpercekben. Így két ilyen különbsége sem lehet 11, hiszen az nem osztható 3-mal.
- Az első és a harmadik gép 20 és 75 másodpercenként ad ki zajt, vagyis 5-tel osztható másodpercekben tudnak csak megszólalni. Így két ilyen zaj kezdete között is csak 5-tel osztható lehet az időkülönbség, vagyis ez sem lehet 11.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

5. Kullancs kapitány öt kalózát veszélyes küldetésre küldi. A küldetés végén a megbeszélt időpontban vissza kell érni a találkozóhelyre. Siker esetén a kapitány összesen 60 arany jutalmat ad nekik. Az öt kalóz közül azonban csak azok kapnak jutalmat, akik időben visszaérkeznek, ők viszont mind ugyanannyi aranyat. A kapitány bízik a kalózaiban és már előre felkészül a gyors jutalomosztásra. Ezért szeretné most néhány erszénybe úgy szétosztani a 60 aranyat, hogy aztán a jutalmazás minden esetben elvégezhető legyen az erszények felbontása nélkül is.
Adj minél kevesebb erszényt használó szétosztást és mutasd meg, hogy azzal 1, 2, 3, 4 vagy 5 kalóz is megfelelően jutalmazható. Nem kell bizonyítanod, hogy kevesebb erszénnyel nem lehetséges megoldani a feladatot.

Megoldás. 9 erszénnyel lehetséges a szétosztás, a kapitány például 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12 aranyat tehet az erszényekbe.
Ekkor 5 kalóz jutalmazásához a $12 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5$ csoportosítás megfelelő.
4 kalóz jutalmazásához a $12+3 = 10+5 = 9+4+2 = 8+7$ csoportosítás jó. Ebből két-két csoportot egyesítve 2 kalóz esetén is ki tudja osztani a kapitány a jutalmakat.
3 kalóz jutalmazásához a $12 + 8 = 10 + 7 + 3 = 9 + 5 + 4 + 2$ csoportosításban oszthatja ki a kapitány az erszényeket. Ha csak 1 kalóz kap jutalmat, akkor ő mindegyik erszényt megkapja.

Megjegyzések.
(1.) Egy érdekes konstrukció 10 erszénnyel: tegyük ki egy sorba a 60 aranyat, majd helyezzünk közéjük elválasztókat minden 12., minden 15. és minden 20. arany után, összesen $4 + 3 + 2 = 9$ darabot (a sor szélére már nem teszünk). A szomszédos elválasztók közötti aranyak kerülnek egy erszénybe. Az erszények tartalma így 12, 3, 5, 4, 6, 6, 4, 5, 3, 12 arany, melyekkel minden esetben lehetséges a jutalmazás.
(2.) 9 erszénnyel az alábbi konstrukciók lehetségesek:

1.	12, 12, 12, 8, 7, 3, 3, 2, 1	**10.**	12, 12, 9, 8, 7, 4, 3, 3, 2
2.	12, 12, 11, 9, 6, 4, 3, 2, 1	**11.**	12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3
3.	12, 12, 11, 9, 5, 4, 3, 3, 1	**12.**	12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1
4.	12, 12, 11, 8, 7, 4, 3, 2, 1	**13.**	12, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3
5.	12, 12, 11, 8, 6, 4, 3, 3, 1	**14.**	12, 11, 9, 8, 6, 6, 4, 3, 1
6.	12, 12, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1	**15.**	12, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2
7.	12, 12, 10, 8, 7, 5, 3, 2, 1	**16.**	12, 10, 9, 7, 6, 6, 5, 3, 2
8.	12, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 3, 2	**17.**	12, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3
9.	12, 12, 9, 8, 7, 5, 3, 3, 1		

(3.) Bizonyítható, hogy 9-nél kevesebb erszénnyel nem lehetséges a feltételeknek megfelelő szétosztás.

Köszönjük a feladatjavaslatot Sztranyák Attilának.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.