



55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2026. március 21.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy táblára felírtunk 9 egymást követő pozitív egész számot. Közülük hármat pirosra színeztünk, másik hármat kékre, a fennmaradó hármat pedig zöldre. A piros számok összege páros. A kék számok szorzata páratlan. A zöld számok összege páratlan, de szorzatuk páros.

Milyen színű lehet a két legkisebb szám, ha azonos színűek?

Megoldás. A három kék szám szorzata csak úgy lehet páratlan, ha mind páratlan.

A három zöld szám között viszont kell lennie párosnak, de az összegük páratlan, így közülük 2 páros és 1 páratlan.

A három piros szám összege csak úgy lehet páros, ha mind páros, vagy ha 1 páros és 2 páratlan van köztük.

De kilenc egymás követő szám között összesen négy vagy öt páros van, így a 2 zöld mellett 3 pirosnak kell párosnak lennie.

Mivel a két legkisebb szám egyike páros, a másik páratlan, így csak zöldek lehetnek.

Ez meg is valósítható, például: **2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.**

2. Ágost előtt van egy lila, egy sárga és egy fehér kártya. Mindegyikre írni fog egy-egy pozitív egész számot. Előtte a következő két állítást mondja:

„A lila és a fehér kártyákra különböző számokat fogok írni.”

„A három szám összege 100 lesz.”

Hányféleképpen tud számokat írni a kártyákra Ágost úgy, hogy az állításai teljesüljenek?

Megoldás. Ha a lila kártyára 1-et ír, akkor a másik két kártyán a számok összege 99. Ezt 98-féleképpen lehet felírni két pozitív egész összegeként, ha az összeadandók sorrendje is számít. Ebből azonban egy nem lesz jó, amikor a fehér kártyán is 1-es van. Tehát ilyen felírásból 97 létezik.

Hasonlóan, ha a lila kártyán 2 van, akkor a másik kettő összege 98, amit 97-féleképpen lehetne felírni, de 1 nem lesz jó, vagyis marad 96.

Ez egészen addig működik, amíg a lila kártyán 49 van, akkor a másik két szám összege 51. Ez 50 lehetséges folytatást jelent, amiből nem jó az, amikor a zöld kártyán is 49 van. Ez 49 lehetséges felírás. Ha a lila kártyán legalább 50 van, akkor már nem fordulhat elő, hogy a fehér kártyán ugyanaz a szám szerepeljen, mint a lilán, ezért innentől már minden lehetséges összeg jó felírást eredményez.

Ha a lila kártyán $50 \leq n \leq 98$ áll, akkor $100 - n$ a másik két szám összege, amit $(99 - n)$ -féleképpen lehet összegként felírni.



Vagyis a lehetséges felírások száma:

$$97 + 96 + \dots + 49 + 49 + 48 + \dots + 1 = 97 + 96 + \dots + 2 + 1 + 49 = \frac{98 \cdot 97}{2} + 49 = 4802.$$

Második megoldás. Képzeljük el a 100-at száz darab 1 összegeként:

$$1 + 1 + 1 \dots + 1 + 1$$

Válasszunk ki a 99 darab + közül kettőt, és ezek jelentsék a „kártyahatárokat”. Vagyis, ha pl. az első + a 6. a második pedig a 29., akkor az azt jelenti, hogy a lila kártyára 6-ot, a sárgára 23-at, a fehérre pedig 71-et írunk. Ha tehát annyi a feltétel csak, hogy a kártyákra írt számok összege 100 legyen, akkor olyanból épp annyi van, ahányféleképpen a két +-t ki tudjuk választani.

Az első +-ra 99, a másodikra már csak 98 lehetőségünk van, és ezek függetlenek. De a sorrendjük sem számít, így $\frac{99 \cdot 98}{2}$ lehetőség van a két + kiválasztására.

Ebből még le kell vonni azokat, amikor a lila és a fehér kártyán ugyanaz a szám van. Ilyenből 49 van, hiszen ha a lila kártyán legfeljebb 49 van, akkor a fehérre ugyanaz a szám szerepelhet, és ez meghatározza a sárgán lévő számot egyértelműen. Ha viszont a lila kártyán lévő szám legalább 50, akkor nem lehet a lila és a fehér egyenlő.

Tehát a helyes válasz: $\frac{99 \cdot 98}{2} - 49 = 4802$.

3. Egy négyjegyű pozitív egész számot leírtunk egy papírra.

Ezután a következő sorba, a szomszédos számjegyek alá leírjuk azok különbségének abszolút értékét. Ezt ismételjük addig, amíg az utolsó sorban egyetlen számjegyet kapunk.

3527

235

12

1

Legfeljebb hány különböző számjegy szerepelhet a papíron?

A jobb oldali példában a papíron az 1, 2, 3, 5, 7 számjegyek szerepelnek, vagyis 5 különböző számjegy.

Megoldás. Ha tíz különböző számjegy szerepel a papíron, akkor köztük van a nulla is.

Ha a nulla az első sorban van, akkor a vele szomszédos számjegyek meg fognak jelenni a következő sorban is.

Ha a nulla nem az első sorban van, akkor azt csak úgy kaphattuk, hogy egy számból önmagát vontuk ki. Tehát nem lehet mind a tíz számjegy különböző.

Kilenc különböző számjegy lehetséges, például a következő módon:

9265

741

33

0



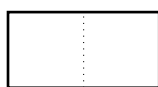
4. Egy 5×7 -es téglalapot a rácsvonalak mentén összefüggő részekre osztottunk úgy, hogy minden rész kerülete egyenlő és legalább 10 egység. Legfeljebb hány részre oszthattuk a téglalapot, ha minden rész területe különböző?

Adj példát a lehető legtöbb résszel és bizonyítsd, hogy annál több nem lehet.

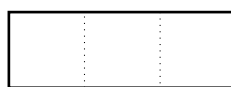
Megoldás. 1, 2, és 3 négyzetből álló alakzatból csak az alábbi ábrán látható négyféle létezik. Ezek kerülete kisebb 10 egységnél, így nem szerepelhetnek az 5×7 -es téglalap felosztásában.



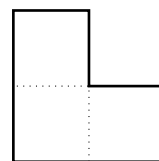
$$K = 4$$



$$K = 6$$



$$K = 8$$



$$K = 8$$

Ezért a felosztásban szereplő részek területe legalább 4 egység. A hat legkisebb lehetséges terület összege $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$, ami több az 5×7 -es téglalap területénél, így a felosztásban legfeljebb öt rész szerepelhet.

Öt résszel létezik megfelelő felosztás. Az ábrán látható konstrukció esetén minden rész kerülete 12 egység, területük pedig az ábrán szerepel.

