TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2026. március 20.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. 20 ember van egy szobában, mindegyikük igazmondó vagy hazudós. Az előbbiek mindig igazat mondanak, az utóbbiak mindig hazudnak. Minden ember pontosan egy állítást mondott az alábbiak közül:

1. állítás: Legfeljebb 1 igazmondó van közöttünk.

2. állítás: Legfeljebb 2 igazmondó van közöttünk.

$\vdots$

10. állítás: Legfeljebb 10 igazmondó van közöttünk.

11. állítás: Pontosan 11 hazudós van közöttünk.

12. állítás: Pontosan 12 hazudós van közöttünk.

$\vdots$

20. állítás: Pontosan 20 hazudós van közöttünk.

Hány igazmondó van a szobában?

Minden $1 \leq n \leq 10$ esetén az n. állítás az, hogy „Legfeljebb n igazmondó van közöttünk.". Minden $11 \leq n \leq 20$ esetén az n. állítás az, hogy „Pontosan n hazudós van közöttünk.".

Megoldás. Legyen az igazmondók száma n. A második 10 állítás közül legfeljebb egy lehet igaz, amiből következik, hogy van legalább 9 hazudós a szobában, vagyis $n \leq 11$.
Nem lehet az igazmondók száma 11, hiszen ekkor egyetlen állítás sem igaz.
Nem lehet az igazmondók száma 10 sem, hiszen ekkor csak a 10. állítás lenne igaz.
Ha $n \leq 9$, akkor első 10 állítás közül az utolsó $11-n$ igaz, az utolsó 10-ből pedig pontosan egy. Vagyis azt kapjuk, hogy $11 - n + 1 = n$, azaz $n = 6$.
Az lehetséges is, hogy az igazmondók száma 6, hiszen ekkor a 6., 7., 8., 9., 10., és 14. állítás igaz, a többi pedig hamis.

Megjegyzés. *Sajnos a feladat szövege nem tartalmazza, hogy minden állítás el is hangzik, pedig ez volt a feladat kitűzőinek szándéka. Ha nem kell minden állításnak elhangzani, akkor más a feladat megoldása. A nehézsége viszont nagyjából megegyezik a másik értelmezés szerinti feladattal.*

Ekkor lehetséges, hogy 0 igazmondó van, ha mindenki mondjuk a 11. állítást mondta.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

Minden $1 \leq n \leq 10$ esetén lehetséges, hogy n igazmondó van, ha például n ember az n. állítást mondja, a többiek pedig mondjuk az $(n-1)$. állítást, ha $n > 1$, és a 20. állítást, ha $n = 1$.
10-nél több igazmondó nem lehet. Ekkor ugyanis az első 10 állítás egyike sem lenne igaz, így igazmondó nem mondhatja. Mivel legfeljebb 9 hazudós lenne ebben az esetben, így a második 10 állítás egyike sem lenne igaz, vagyis az igazmondók egyetlen mondatot sem tudnának mondani.

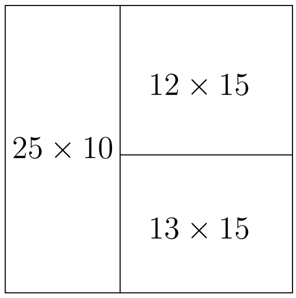
2. Egy 25 egység oldalú négyzetet először egy szakasz segítségével felosztottunk két téglalapra. Ezt követően a két téglalap közül az egyiket ismét felosztottuk egy szakasz segítségével két téglalapra. Így összesen három téglalapot kaptunk.

(a) Lehet-e, hogy a három kisebb téglalap kerületének összege 180 egység?

(b) Lehet-e, hogy a három kisebb téglalap kerületének összege 250 egység?

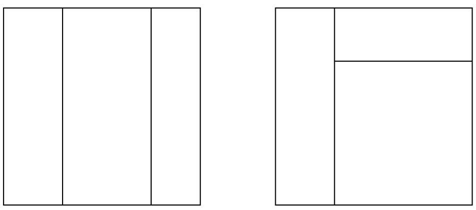
Megoldás. (a) Lehetséges ez a felosztás például az ábrán látható módon.
Ekkor a három téglalap kerületének összege:

$$2 \cdot (25 + 10) + 2 \cdot (12 + 15) + 2 \cdot (13 + 15) = 70 + 54 + 56 = 180 \text{ egység.}$$



(b) A három téglalap kerületének összegébe beleszámít az eredeti négyzet kerülete és a behúzott szakaszok kétszerese. Az első behúzott szakasz minden esetben pontosan 25 egység hosszú. A második behúzott szakasz pedig legfeljebb 25 egység hosszú.
Így a három kerület összege legfeljebb $4 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = 100 + 50 + 50 = 200$ egység lehet.
Tehát nem lehet a kerületek összege 250 egység.

Megjegyzések. (1.) Kétféle felosztás felel meg a feladat feltételeinek, attól függően hogy a második szakasz az elsővel párhuzamos vagy pedig merőleges rá.



Az (a) feladat konstrukciója csak a második felosztásból jöhet ki, hiszen a (b) részben leírtak miatt az első esetben mindenképp 200 egység lesz a kerületek összege.
Két merőleges szakasz esetén a második szakasz x hosszára a $4 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 2x = 180$ egyenletből $x = 15$ adódik.
A 15 hosszúságú szakaszt tetszőleges magasságban behúzva a feltételeknek megfelelő felosztást kapunk.

(2.) Benő Mátyás 8. évfolyamos tanuló észrevétele. Két szakasszal akkor sem lehet 250 egység a három rész kerületének összege, ha nem téglalapokra osztjuk a négyzetet. A kerület 150 egységnyi növeléséhez ugyanis valamelyik szakasznak legalább 37,5 egység hosszúnak kellene lennie, amely nagyobb a négyzet pontjai között fellépő legnagyobb távolságnál ($\sqrt{2} < 1{,}5$ miatt $25\sqrt{2} < 37{,}5$).

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

3. Egy 11-nél nagyobb N egész számot Anna elosztott maradékosan 12-vel, míg Béla 13-mal. Mindketten összeadták a saját osztásuknál kapott hányadost és maradékot. Ez a két összeg ugyanannyi lett.
Melyik a legkisebb ilyen N szám?
A maradékos osztás során a maradék kisebb, mint az osztó, de nem lehet negatív szám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy Anna osztásánál a hányados a, a maradék m, míg Béla osztásánál a hányados b és a maradék n. Ekkor $N = 12a + m = 13b + n$ és $a + m = b + n$.
Ebből $11a = 12b$ következik.
Mivel a 11 és a 12 relatív prímek, a-nak 12-vel (b-nek pedig 11-gyel) osztható számnak kell lennie.
Mivel $N > 11$, így $a \geq 1$, de az oszthatósági feltétel miatt így $a \geq 12$ is teljesül.
Ekkor $N = 12a + m \geq 12 \cdot 12 = 144$.
A 144 teljesíti a feltételt: 12-vel osztva a hányados 12, a maradék 0, összesen 12; 13-mal osztva a hányados 11, a maradék 1, ami összesen 12. Tehát N lehetséges legkisebb értéke 144.

Második megoldás. Anna kisebb számmal oszt, így legalább akkora hányadost kap, mint Béla. Mivel hányados és maradék összege egyenlő a két osztásnál, maradékból viszont Béla kap legalább akkorát, mint Anna.
Ha mindkét maradék 0-nál nagyobb, akkor az 1-gyel kisebb számnál is egyezik a két összeg (hiszen a hányadosok nem változnak, a maradékok 1-gyel csökkennek), és ez a szám is nagyobb 11-nél.
Így a legkisebb N esetén Anna csak 0 maradékot kaphat, vagyis N osztható 12-vel.
A 12-vel osztható pozitív egészekre a hányados és maradék összege:

	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144
12-vel	1+0	2+0	3+0	4+0	5+0	6+0	7+0	8+0	9+0	10+0	11+0	12+0
13-mal	0+12	1+11	2+10	3+9	4+8	5+7	6+6	7+5	8+4	9+3	10+2	11+1

Látható, hogy először a 144-nél egyezik meg a két összeg értéke, így N legkisebb értéke 144.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

4. Kullancs kapitány öt kalózát veszélyes küldetésre küldi. A küldetés végén a megbeszélt időpontban vissza kell érni a találkozóhelyre. Siker esetén a kapitány összesen 60 arany jutalmat ad nekik. Az öt kalóz közül azonban csak azok kapnak jutalmat, akik időben visszaérkeznek, ők viszont mind ugyanannyi aranyat. A kapitány bízik a kalózaiban és már előre felkészül a gyors jutalomosztásra. Ezért szeretné most néhány erszénybe úgy szétosztani a 60 aranyat, hogy aztán a jutalmazás minden esetben elvégezhető legyen az erszények felbontása nélkül is.
Adj minél kevesebb erszényt használó szétosztást és mutasd meg, hogy azzal 1, 2, 3, 4 vagy 5 kalóz is megfelelően jutalmazható. Nem kell bizonyítanod, hogy kevesebb erszénnyel nem lehetséges megoldani a feladatot.

Megoldás. 9 erszénnyel lehetséges a szétosztás, a kapitány például 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12 aranyat tehet az erszényekbe.
Ekkor 5 kalóz jutalmazásához a $12 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5$ csoportosítás megfelelő.
4 kalóz jutalmazásához a $12+3 = 10+5 = 9+4+2 = 8+7$ csoportosítás jó. Ebből két-két csoportot egyesítve 2 kalóz esetén is ki tudja osztani a kapitány a jutalmakat.
3 kalóz jutalmazásához a $12 + 8 = 10 + 7 + 3 = 9 + 5 + 4 + 2$ csoportosításban oszthatja ki a kapitány az erszényeket. Ha csak 1 kalóz kap jutalmat, akkor ő mindegyik erszényt megkapja.

Megjegyzések.
(1.) Egy érdekes konstrukció 10 erszénnyel: tegyük ki egy sorba a 60 aranyat, majd helyezzünk közéjük elválasztókat minden 12., minden 15. és minden 20. arany után, összesen $4 + 3 + 2 = 9$ darabot (a sor szélére már nem teszünk). A szomszédos elválasztók közötti aranyak kerülnek egy erszénybe. Az erszények tartalma így 12, 3, 5, 4, 6, 6, 4, 5, 3, 12 arany, melyekkel minden esetben lehetséges a jutalmazás.
(2.) 9 erszénnyel az alábbi konstrukciók lehetségesek:

1.	12, 12, 12, 8, 7, 3, 3, 2, 1	**10.**	12, 12, 9, 8, 7, 4, 3, 3, 2
2.	12, 12, 11, 9, 6, 4, 3, 2, 1	**11.**	12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3
3.	12, 12, 11, 9, 5, 4, 3, 3, 1	**12.**	12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1
4.	12, 12, 11, 8, 7, 4, 3, 2, 1	**13.**	12, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3
5.	12, 12, 11, 8, 6, 4, 3, 3, 1	**14.**	12, 11, 9, 8, 6, 6, 4, 3, 1
6.	12, 12, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1	**15.**	12, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2
7.	12, 12, 10, 8, 7, 5, 3, 2, 1	**16.**	12, 10, 9, 7, 6, 6, 5, 3, 2
8.	12, 12, 10, 7, 6, 5, 3, 3, 2	**17.**	12, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3
9.	12, 12, 9, 8, 7, 5, 3, 3, 1		

(3.) Bizonyítható, hogy 9-nél kevesebb erszénnyel nem lehetséges a feltételeknek megfelelő szétosztás.

Köszönjük a feladatjavaslatot Sztranyák Attilának.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

5. Egy pingpongversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 1 pontot, a vereség 0 pontot ért, döntetlen pedig nincs.
Hányan vehettek részt a versenyen, ha a versenyzők több mint fele pontosan 2 ponttal zárta a bajnokságot? Keresd meg az összes lehetőséget és bizonyítsd, hogy más nem lehetséges.

Megoldás. Ahhoz, hogy egy versenyzőnek 2 pontja lehessen, legalább 2 meccsre, azaz összesen legalább 3 résztvevőre van szükség. 3 versenyző esetén is csak úgy lehetne 2 pontja valakinek, ha minden meccsét megnyerné. Ilyen versenyzőből legfeljebb 1 lehet, így 3 résztvevő közül biztos, hogy kevesebb, mint a felének lehet csak 2 pontja.

4 versenyző esetén lehetséges, hogy 3-an is 2 ponttal zárnak. Ha például A, B és C „körbeveri” egymást, azaz A legyőzi B-t, B legyőzi C-t és C legyőzi A-t; míg a negyedik versenyzőt, D-t, mindenki legyőzi.

	A	B	C	D	Pont
A	-	1	0	1	2
B	0	-	1	1	2
C	1	0	-	1	2
D	0	0	0	-	0

5 versenyző esetén pedig lehetséges a „teljes körbeverés”, azaz amikor mindenki 2-t megnyer és 2-t elveszít a meccsei közül. Ez elérhető például úgy, ha egy körbe állítva fel az 5 versenyzőt, mindenki legyőzi az óramutató járása irányában utána következő első két versenyzőt.
Ebben az esetben mindenkinek 2 pontja van.

	A	B	C	D	E	Pont
A	-	1	1	0	0	2
B	0	-	1	1	0	2
C	0	0	-	1	1	2
D	1	0	0	-	1	2
E	1	1	0	0	-	2

Ha 5 versenyző teljes körbeveréséből kiindulva újabb embereket adunk a bajnoksághoz, akik az A, B, C, D és E mindegyikét legyőzik, akkor továbbra is marad 5 versenyző, aki 2 ponttal zárja a bajnokságot. Ha legfeljebb 4 embert adunk hozzá, azaz legfeljebb 9 versenyző van összesen, akkor a feladat feltétele teljesül.
Végül belátjuk, hogy 10 vagy több versenyzővel nem teljesülhet a feladat feltétele, mivel legfeljebb 5 versenyzőnek lehet pontosan 2 pontja. Tekintsük a bajnokság utolsó 6 helyezettjét (azaz a 6 legkevesebb pontot elért versenyzőt, holtverseny esetén szabadon választhatunk az azonos pontszámúak közül). Közöttük $\frac{6\cdot5}{2}=15$ meccs zajlott le, azaz hatan együtt legalább 15 pontot szereztek (még akkor is, ha az előrébb végzett versenyzők ellen az összes meccsüket elvesztették). Mivel $6\cdot2=12<15$, ezért a 6 versenyző között kell legyen olyan, aki legalább 3 pontot szerzett (és így az utolsó 6 versenyzőn kívül mindenki más is legalább 3 pontot szerzet), tehát legfeljebb 5-en szerezhettek pontosan 2 pontot.
Összefoglalva: 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 versenyző esetén lehetséges, hogy a versenyzők több mint fele pontosan 2 ponttal zárta a bajnokságot.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő