TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2026. március 21.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Ágost előtt van egy lila, egy sárga és egy fehér kártya. Mindegyikre írni fog egy-egy pozitív egész számot. Előtte a következő két állítást mondja:

„A lila és a fehér kártyákra különböző számokat fogok írni.”

„A három szám összege 100 lesz.”

Hányféleképpen tud számokat írni a kártyákra Ágost úgy, hogy az állításai teljesüljenek?

Megoldás. Ha a lila kártyára 1-et ír, akkor a másik két kártyán a számok összege 99. Ezt 98-féleképpen lehet felírni két pozitív egész összegeként, ha az összeadandók sorrendje is számít. Ebből azonban egy nem lesz jó, amikor a fehér kártyán is 1-es van. Tehát ilyen felírásból 97 létezik.
Hasonlóan, ha a lila kártyán 2 van, akkor a másik kettő összege 98, amit 97-féleképpen lehetne felírni, de 1 nem lesz jó, vagyis marad 96.
Ez egészen addig működik, amíg a lila kártyán 49 van, akkor a másik két szám összege 51. Ez 50 lehetséges folytatást jelent, amiből nem jó az, amikor a zöld kártyán is 49 van. Ez 49 lehetséges felírás.
Ha a lila kártyán legalább 50 van, akkor már nem fordulhat elő, hogy a fehér kártyán ugyanaz a szám szerepeljen, mint a lilán, ezért innentől már minden lehetséges összeg jó felírást eredményez.
Ha a lila kártyán $50 \leq n \leq 98$ áll, akkor $100 - n$ a másik két szám összege, amit $(99 - n)$-féleképpen lehet összegként felírni.
Vagyis a lehetséges felírások száma:

$$97 + 96 + \ldots + 49 + 49 + 48 + \ldots + 1 = 97 + 96 + \ldots + 2 + 1 + 49 = \frac{98 \cdot 97}{2} + 49 = 4802.$$

Második megoldás. Képzeljük el a 100-at száz darab 1 összegeként:

$$1 + 1 + 1 \ldots + 1 + 1$$

Válasszunk ki a 99 darab + közül kettőt, és ezek jelentsék a „kártyahatárokat”. Vagyis, ha pl. az első + a 6. a második pedig a 29., akkor az azt jelenti, hogy a lila kártyára 6-ot, a sárgára 23-at, a fehérre pedig 71-et írunk. Ha tehát annyi a feltétel csak, hogy a kártyákra írt számok összege 100 legyen, akkor olyanból épp annyi van, ahányféleképpen a két +-t ki tudjuk választani.
Az első +-ra 99, a másodikra már csak 98 lehetőségünk van, és ezek függetlenek. De a sorrendjük sem számít, így $\frac{99 \cdot 98}{2}$ lehetőség van a két + kiválasztására.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Ebből még le kell vonni azokat, amikor a lila és a fehér kártyán ugyanaz a szám van. Ilyenből 49 van, hiszen ha a lila kártyán legfeljebb 49 van, akkor a fehéren ugyanaz a szám szerepelhet, és ez meghatározza a sárgán lévő számot egyértelműen. Ha viszont a lila kártyán lévő szám legalább 50, akkor nem lehet a lila és a fehér egyenlő.
Tehát a helyes válasz: $\frac{99 \cdot 98}{2} - 49 = 4802$.

2. Arany- és ezüstszínű gyöngyöket vásároltam. Ha kétszer annyi aranyszínű gyöngyöt vásároltam volna, de csak feleannyi ezüstszínűt, akkor összesen ugyanannyi darab gyöngyöt vettem volna, de másfélszer annyit kellett volna fizetnem.
Hány aranyszínű gyöngyöt lehet venni 12 ezüstszínű gyöngy árából?
Az ugyanolyan színű gyöngyök ugyanannyiba kerülnek.

Megoldás. Jelölje a, illetve e a megvásárolt arany-, illetve ezüstszínű gyöngyök számát.
Ekkor mivel ugyanannyi gyöngyöt vettem, ezért

$$a + e = 2a + \frac{e}{2}$$

azaz $\frac{e}{2} = a$, azaz $e = 2a$, tehát kétszer annyi ezüst gyöngyöt vettem, mint arany gyöngyöt.
Ha egy arany gyöngy ára x, míg egy ezüst gyöngy ára y, akkor mivel másfélszer annyit kellett volna fizetnem,

$$\frac{3}{2} \cdot (xa + ye) = x \cdot 2a + y \cdot \frac{e}{2}.$$

Az e helyére írjunk $2a$-t, majd osszunk a-val (itt $a > 0$) és szorozzunk 2-vel:

$$3 \cdot (x + 2y) = 2 \cdot (2x + y),$$

azaz $4y = x$. Ezt 3-mal szorozva $12y = 3x$, ami éppen azt jelenti, hogy 3 aranyszínű gyöngyöt lehet venni 12 ezüstszínű gyöngy árából.

Második megoldás. A gyöngyök számában az aranyak kétszerezése ugyanannyit változtat, mint az ezüstök felezése. Ez azt jelenti, hogy az eredeti vásárlásban az ezüstök számának fele megegyezik az aranyak számával, azaz kétszer annyi ezüstöt vettünk, mint aranyat.
Tekintsük a megvásárolt aranygyöngyök számát 1 egységnek, ennek és a 2 egységnyi ezüstgyöngynek az árát együtt 1 (pénz)egységnek. Ekkor a szöveg alapján 2 egység arany és 1 egység ezüst ára másfélszer annyi, azaz $\frac{3}{2}$ egység.
Emiatt 3 egység arany és 3 egység ezüst ára $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ egység. Tehát 1 egység arany és 1 egység ezüst ára $\frac{5}{2} : 3 = \frac{5}{6}$ egység.
Ez az eredeti vásárlásnál 1 egység ezüsttel kevesebb, tehát 1 egység ezüst ára $\frac{1}{6}$ egység.
Így viszont 1 egység arany ára $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ egység.
Az aranygyöngyök tehát négyszer annyiba kerülnek, mint az ezüstök, így 12 ezüst árából 3 aranyat lehet venni.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

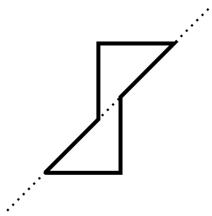
3. Egy hatszög minden oldala egyenlő hosszúságú.

(a) Lehetséges-e, hogy a hatszögnek pontosan 5 különböző oldalegyenese van?

(b) Lehetséges-e, hogy a hatszögnek pontosan 4 különböző oldalegyenese van?

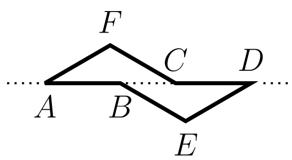
Egy hatszög szomszédos oldalai nem eshetnek egy egyenesbe, nem szomszédos oldalainak pedig nem lehet közös pontjuk.

Megoldás. (a) Igen, lehetséges. Egy egységnyi oldalhosszúságú négyzetet vágjunk ketté az egyik átlója mentén, és az egyik részt toljuk el az átló irányában egységnyi távolságra. A keletkező hatszögnek pontosan öt különböző oldalegyenese van.



(b) Nem lehetséges. Tegyük fel, hogy létezik ilyen hatszög. Mivel több oldala van, mint oldalegyenese, ezért kell lennie olyan e oldalegyenesnek, amin egynél több oldalszakasz van. Ezek nem lehetnek szomszédos oldalak, így közös pontjuk sem lehet. Ekkor viszont van legalább négy különböző végpontjuk, amelyekben más oldalegyenesek metszik e-t. De e-n kívül csak három további oldalegyenes van, amelyek legfeljebb három pontban metszhetik, ami ellentmondás.

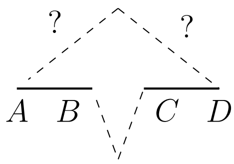
Második megoldás. (a) Vegyük fel egy egyenesen sorra az A, B, C, D pontokat úgy, hogy $AB = CD = 1$ és $BC < 1$ teljesüljön. Legyen F egy olyan pont, amelyre $AF = FC = 1$ (ilyen létezik, mivel $AC < 2$), és legyen E az egyenes másik oldalán olyan, hogy $BE = ED = 1$. Az így kapott $ABEDCF$ hatszögnek öt különböző oldalegyenese van.



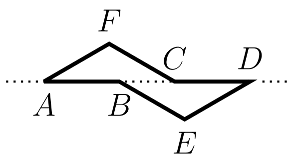
(b) Ha egy oldalegyenesen három vagy több oldalszakasz lenne, azoknak nem lehetne közös pontja. Így a végpontjaik száma nem lehet 6-nál kevesebb, ami azt jelenti, hogy a hatszög összes csúcsa ezen az egyenesen van, ami nyilván lehetetlen.
Ha létezne hatszög négy oldalegyenessel, akkor a fentiek miatt létezne két egyenes, amelyiken két-két oldalszakasz van. Az ugyanazon egyenes lévő szakaszoknak nem lehet közös pontja, a különbözőeken lévők pedig csak az egyenesek metszéspontjában találkozhatnak.
Így a négy szakasz legalább 7 különböző végponttal rendelkezik, ami lehetetlen, hiszen ezek a végpontok a hatszög csúcsai. Tehát nem létezik hatszög négy különböző oldalegyenessel.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

Harmadik megoldás. Mind az (a), mind a (b) feladatban kevesebb oldalegyenest szeretnénk, mint szakaszt, így kell olyan oldalegyenes, amin legalább két szakasz van. Tegyük fel, hogy egy e egyenesen találhatók a hatszög A, B, C, D csúcsai ebben a sorrendben úgy, hogy $AB = CD$ a hatszög oldalai. Induljunk el a hatszög kerületén A csúcstól a B csúcs irányába. A B csúcs után a BE oldal E végpontja nincs az e egyenesen. Később előbb-utóbb el kell jutnunk a C vagy a D pontba.
Ha a C pontba érünk előbb, akkor A-tól D-ig legalább négy oldalon végighaladtunk, így D-ből A-ba már csak legfeljebb két oldalon mozgunk. Ez azonban lehetetlen, mivel $AD > AB + CD$, így több mint két oldalnyi távolságot kellene megtennünk.



Tehát a D pontba érünk előbb. Ezután C-ből továbbhaladva megint le kell lépnünk az e egyenesről a hatszög egy F csúcsába. Ezzel már hat különböző csúcsnál tartunk, így a hatszög oldalai rendre AB, BF, FD, DC, CE, EA. Ez csak úgy lehetséges, ha $AC = BD < 2$, és E és F különböző oldalán vannak az e egyenesnek. Így megkapható egy hatszög pontosan 5 oldalegyenessel.



Beláttuk, hogy csak ebben a szerkezetben lehet egy oldalegyenesen két szakasz. 4 oldalegyenes esetén az AB és CD oldalak mellett még a BE és CF, vagy az ED és AF oldalak eshetnének egy egyenesre. De ezek a szakaszok mindkét esetben két különböző pontot tartalmaznak az e egyenesről, ami ellentmondás. Tehát nem létezik egyenlő oldalú hatszög pontosan négy oldalegyenessel.

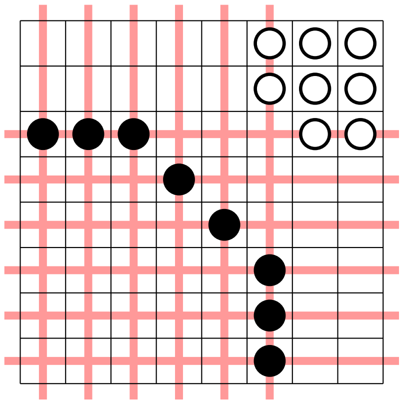
Megjegyzés. Az első két megoldásban a (b) rész bizonyítása nem használta ki, hogy az oldalak egyenlő hosszúak. A harmadik megoldásból viszont kiderül, hogy az (a) részre csak az itt leírt szerkezetű hatszög lehet jó.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

4. Egy 8×8-as sakktábla mezőire elhelyeztünk 8 sötét és 8 világos bábut. Egy sort vagy oszlopot borúsnak nevezünk, ha több benne a sötét bábu, mint a világos.
Legfeljebb mennyi lehet a borús sorok és borús oszlopok számának összege?
Egy mezőn legfeljebb egy bábu áll és egy bábu sem állhat egyszerre több mezőn.

Megoldás. Nevezzük a sorokat és oszlopokat együttesen soroszlopnak.
El lehet helyezni a bábukat úgy, hogy 12 soroszlop borús legyen, íme egy példa erre (a piros vonalak jelzik a borús soroszlopokat):



Nem lehet 13 vagy annál több soroszlop borús.
Ha lenne 13, akkor lenne 7 sor vagy 7 oszlop, ami borús. Tegyük fel, hogy 7 ilyen sor van (a szimmetria miatt ennek nincs jelentősége).
Minden ilyen sorban kell lennie sötét bábunak, és így legfeljebb egy sorban lehet csak két sötét bábu.
Vagyis ebből a 7 sorból egyetlen sor lehet, ahol van világos bábu, és ott is csak egy.
Emiatt a nyolcadik sorban kell lennie legalább 7 világos bábunak.
Az oszlopok közül is legalább 6 borús, és az oszlopok közül legalább 7-ben van világos bábu.
Így legfeljebb egy oszlop lehet 1 sötét bábu által borús, a maradék 5-ben legalább két sötét bábunak kell lennie, hogy borús legyen.
Ez viszont ellentmondás, hiszen ez legalább 11 sötét bábut jelentene, miközben csak 8 sötét bábut helyeztünk a táblára.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.