TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

TIT - Kalmár László Matematikaverseny

55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2026. március 20.

NYOLCADIK OSZTÁLY

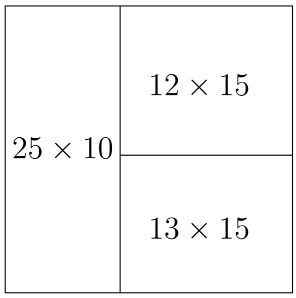
MEGOLDÁSOK

1. Egy 25 egység oldalú négyzetet először egy szakasz segítségével felosztottunk két téglalapra. Ezt követően a két téglalap közül az egyiket ismét felosztottuk egy szakasz segítségével két téglalapra. Így összesen három téglalapot kaptunk.

(a) Lehet-e, hogy a három kisebb téglalap kerületének összege 180 egység?

(b) Lehet-e, hogy a három kisebb téglalap kerületének összege 250 egység?

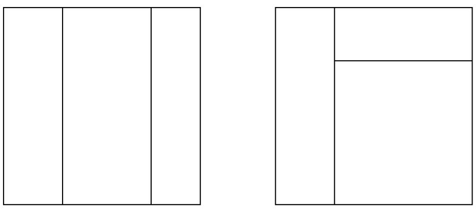
Megoldás. (a) Lehetséges ez a felosztás például az ábrán látható módon.
Ekkor a három téglalap kerületének összege:



$2 \cdot (25+10) + 2 \cdot (12+15) + 2 \cdot (13+15) = 70 + 54 + 56 = 180$ egység.

(b) A három téglalap kerületének összegébe beleszámít az eredeti négyzet kerülete és a behúzott szakaszok kétszerese. Az első behúzott szakasz minden esetben pontosan 25 egység hosszú. A második behúzott szakasz pedig legfeljebb 25 egység hosszú.
Így a három kerület összege legfeljebb $4 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 = 100 + 50 + 50 = 200$ egység lehet. Tehát nem lehet a kerületek összege 250 egység.

Megjegyzések. **(1.)** Kétféle felosztás felel meg a feladat feltételeinek, attól függően hogy a második szakasz az elsővel párhuzamos vagy pedig merőleges rá.



Az (a) feladat konstrukciója csak a második felosztásból jöhet ki, hiszen a (b) részben leírtak miatt az első esetben mindenképp 200 egység lesz a kerületek összege.
Két merőleges szakasz esetén a második szakasz x hosszára a $4 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 2x = 180$ egyenletből $x = 15$ adódik.
A 15 hosszúságú szakaszt tetszőleges magasságban behúzva a feltételeknek megfelelő felosztást kapunk.

(2.) Benő Mátyás 8. évfolyamos tanuló észrevétele. Két szakasszal akkor sem lehet 250 egység a három rész kerületének összege, ha nem téglalapokra osztjuk a négyzetet. A kerület 150 egységnyi növeléséhez ugyanis valamelyik szakasznak legalább 37,5 egység hosszúnak kellene lennie, amely nagyobb a négyzet pontjai között fellépő legnagyobb távolságnál ($\sqrt{2} < 1{,}5$ miatt $25\sqrt{2} < 37{,}5$).

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

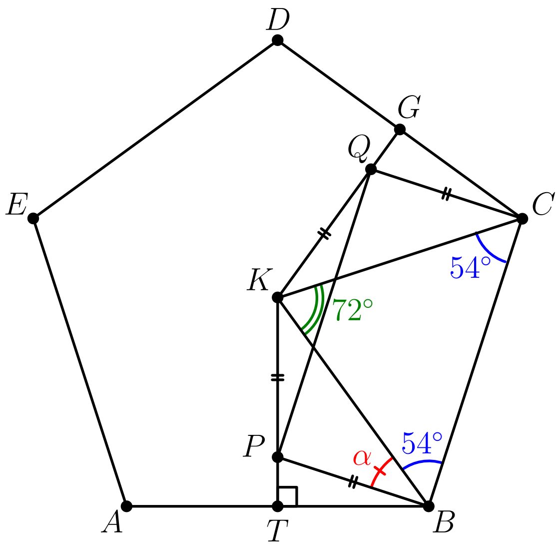
1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

2. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amelynek több kétjegyű osztója van, mint egyjegyű?
A 75 például nem ilyen, mert egyjegyű osztójából ugyanúgy három van (1, 3, 5) mint kétjegyű osztójából (15, 25, 75).

Megoldás. Rendezzük növekvő sorrendbe az osztókat. Ha a sorrendben két középső (vagy négyzetszám esetén egyetlen középső) osztó között van egyjegyű, akkor az osztók legalább fele egyjegyű, így nem teljesülhet a feltétel. Tehát a sorrendben középen lévő (egy vagy két) osztó legalább kétjegyű, és ezek szorzata adja a számot.
A legkisebb lehetőség, a $10 \cdot 10 = 100$ nem jó, mert négy-négy egyjegyű (1, 2, 4, 5), illetve kétjegyű (10, 20, 25, 50) osztója van.
A következő, a $10 \cdot 11 = 110$ viszont már megfelelő, mert három egyjegyű (1, 2, 5), de négy kétjegyű (10, 11, 22, 55) osztója van. Tehát a legkisebb ilyen szám a 110.

3. Az $ABCDE$ szabályos ötszögnek a K pont a középpontja. Az ABK és CDK háromszögek köréírt köreinek középpontja P és Q. Bizonyítsd be, hogy PQ hossza megegyezik a szabályos ötszög oldalával.
A szabályos ötszögnek mind az öt oldala egyenlő hosszú, és minden belső szöge 108°. A csúcsok az óramutató járásával ellentétesen, ábécésorrendben vannak megbetűzve. A szabályos ötszög középpontja egyenlő távolságra van mind az öt csúcsától. Egy háromszög köréírt körének középpontja az a pont, amely a három csúcsától egyenlő távolságra van.

Megoldás. Készítsünk a feladat feltételeinek megfelelő ábrát.



A szabályos ötszöget öt darab egybevágó, egyenlőszárú háromszögre bonthatjuk fel, amelyben a szögek 54°, 54°, 72°. A köréírt kör középpontjának tulajdonságai és az egybevágóság miatt

$$PB = PK = KQ = QC$$

és a $BKP\triangle$ egybevágó a $CKQ\triangle$-gel.

Legyen $PBK\measuredangle = \alpha$. Mivel $BPK\triangle$ egyenlőszárú, ezért $PKB\measuredangle = \alpha$ és $BPK\measuredangle = 180° - 2\alpha$. A $PKQ\triangle$ egyenlőszárú háromszög szögei pedig $PKQ\measuredangle = 72° + 2\alpha$, és

$$KPQ\measuredangle = PQK\measuredangle = 54° - \alpha.$$

$KPQ\triangle$ egyenlőszárú, ezért a K-n áthaladó, PQ-ra merőleges egyenes a szimmetriatengelye. Ugyanez az egyenes szögfelezője a $BKC\measuredangle$-nek is, ezért ez a BKC egyenlőszárú $\triangle$ szimmetriatengelye is.
A fentiekből következik, hogy $BC \parallel PQ$. És mivel $BP = QC$, ezért a $BCPQ$ egy szimmetrikus trapéz. Mivel P egyenlő távolságra van az A és B pontoktól, ezért rajta van AB szakaszfelező merőlegesén, ami egybeesik a PK egyenessel. Hasonlóan Q rajta van CD felezőmerőlegesén.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap · Nemzeti Tehetség Program · Kulturális és Innovációs Minisztérium · Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

A PTB derékszögű $\triangle$-ben $TBP\measuredangle = 54° - \alpha$, ezért $BPT\measuredangle = 36° + \alpha$. Ekkor

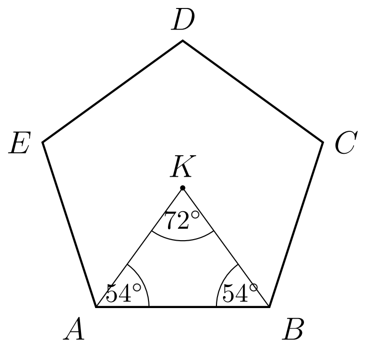
$$BPQ\measuredangle = 180° - TPB\measuredangle - QPK\measuredangle = 180° - (36° + \alpha) - (54° - \alpha) = 90°.$$

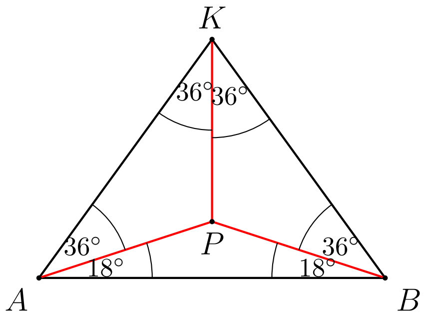
Ebből következik, hogy $BP \parallel CQ$, tehát $BCQP$ egy téglalap, ezért $PQ = BC$.

Második megoldás. A szabályos ötszöget öt darab egybevágó, egyenlőszárú háromszögre bonthatjuk fel, amelyben a szögek 54°, 54°, 72°.

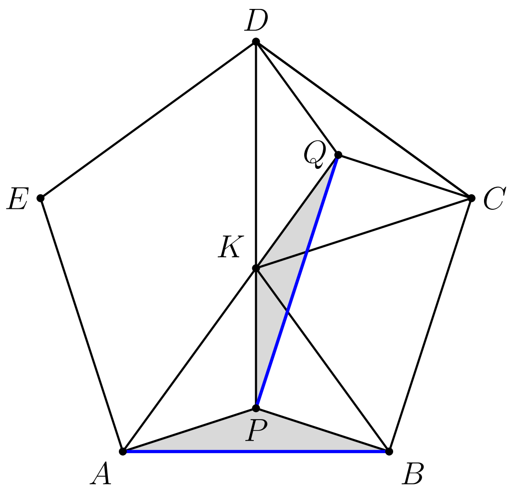
Vizsgájuk ezek közül az ABK háromszöget. Ennek szimmetriája miatt $AKP\measuredangle = PKB\measuredangle$, továbbá APK, PKB és APB egyenlőszárú háromszögek. Ezek alapján a háromszögek belső szögei kiszámolhatók:

- $AKP\measuredangle = PKB\measuredangle = 36°$
- $KAP\measuredangle = KBP\measuredangle = 36°$
- $APK\measuredangle = BPK\measuredangle = 108°$
- $APB\measuredangle = 144°$
- $PAB\measuredangle = PBA\measuredangle = 18°$





A KCD háromszögre ugyanezek a számítások érvényesek.



Az eddig kiszámolt szögek alapján:

$$PKQ\measuredangle = 36° + 72° + 36° = 144°.$$

Innen következik, hogy az APB és PKQ háromszögek egybevágóak, mert P-nél és K-nál lévő szögük 144°, továbbá

$$AP = PB = PK = KQ = DQ = CQ.$$

Az egybevágóság miatt $AB = PQ$, mert ezek az oldalak azonos szögekkel vannak szemben a két háromszögben.

Harmadik megoldás (vázlat). Használjuk újra az 1. feladat ábráját. Az első megoldásban látott módon megállapíthatjuk, hogy $KBC\measuredangle = KCB\measuredangle = 54°$, illetve $BP = CQ$. A második megoldásban látott módon kiszámíthatjuk, hogy az ábrán α-val jelölt $PBK\measuredangle = 36°$.

Hasonlóképpen (az ismert egybevágóság, avagy a BC felezőmerőlegesére vett szimmetria miatt) a $QCK\measuredangle$ is 36°, és így: $PBC\measuredangle = QCB\measuredangle = 54° + 36° = 90°$.

Ebből pedig már következik, hogy $PBCQ$ téglalap, és így $BC = PQ$.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

4. Egy pingpongversenyen mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. A győzelem 1 pontot, a vereség 0 pontot ért, döntetlen pedig nincs.
Hányan vehettek részt a versenyen, ha a versenyzők több mint fele pontosan 2 ponttal zárta a bajnokságot? Keresd meg az összes lehetőséget és bizonyítsd, hogy más nem lehetséges.

Megoldás. Ahhoz, hogy egy versenyzőnek 2 pontja lehessen, legalább 2 meccsre, azaz összesen legalább 3 résztvevőre van szükség. 3 versenyző esetén is csak úgy lehetne 2 pontja valakinek, ha minden meccsét megnyerné. Ilyen versenyzőből legfeljebb 1 lehet, így 3 résztvevő közül biztos, hogy kevesebb, mint a felének lehet csak 2 pontja.

4 versenyző esetén lehetséges, hogy 3-an is 2 ponttal zárnak. Ha például A, B és C „körbeveri” egymást, azaz A legyőzi B-t, B legyőzi C-t és C legyőzi A-t; míg a negyedik versenyzőt, D-t, mindenki legyőzi.

	A	B	C	D	Pont
A	-	1	0	1	2
B	0	-	1	1	2
C	1	0	-	1	2
D	0	0	0	-	0

	A	B	C	D	E	Pont
A	-	1	1	0	0	2
B	0	-	1	1	0	2
C	0	0	-	1	1	2
D	1	0	0	-	1	2
E	1	1	0	0	-	2

5 versenyző esetén pedig lehetséges a „teljes körbeverés”, azaz amikor mindenki 2-t megnyer és 2-t elveszít a meccsei közül. Ez elérhető például úgy, ha egy körbe állítva fel az 5 versenyzőt, mindenki legyőzi az óramutató járása irányában utána következő első két versenyzőt.
Ebben az esetben mindenkinek 2 pontja van.

Ha 5 versenyző teljes körbeveréséből kiindulva újabb embereket adunk a bajnoksághoz, akik az A, B, C, D és E mindegyikét legyőzik, akkor továbbra is marad 5 versenyző, aki 2 ponttal zárja a bajnokságot. Ha legfeljebb 4 embert adunk hozzá, azaz legfeljebb 9 versenyző van összesen, akkor a feladat feltétele teljesül.
Végül belátjuk, hogy 10 vagy több versenyzővel nem teljesülhet a feladat feltétele, mivel legfeljebb 5 versenyzőnek lehet pontosan 2 pontja. Tekintsük a bajnokság utolsó 6 helyezettjét (azaz a 6 legkevesebb pontot elért versenyzőt, holtverseny esetén szabadon választhatunk az azonos pontszámúak közül). Közöttük $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ meccs zajlott le, azaz hatan együtt legalább 15 pontot szereztek (még akkor is, ha az előrébb végzett versenyzők ellen az összes meccsüket elvesztették). Mivel $6 \cdot 2 = 12 < 15$, ezért a 6 versenyző között kell legyen olyan, aki legalább 3 pontot szerzett (és így az utolsó 6 versenyzőn kívül mindenki más is legalább 3 pontot szerzet), tehát legfeljebb 5-en szerezhettek pontosan 2 pontot.
Összefoglalva: 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 versenyző esetén lehetséges, hogy a versenyzők több mint fele pontosan 2 ponttal zárta a bajnokságot.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő

1037 Budapest, Szépvölgyi út 31.
Postacím: 1301 Budapest, Pf. 54.
E-mail: kapcsolat@kalmarverseny.hu; titkarsag@titnet.hu
Honlap: https://www.kalmarverseny.hu
Adószám: 19002457-2-41

5. Egy N pozitív egész számot Anna elosztott maradékosan 20-szal, míg Béla 26-tal. Mindketten összeadták a saját osztásuknál kapott hányadost és maradékot. Ez a két összeg ugyanannyi lett. Melyik a legnagyobb ilyen N szám?
A maradékos osztás során a maradék kisebb, mint az osztó, de nem lehet negatív szám.

Megoldás. Tegyük fel, hogy Anna osztásánál a hányados a, a maradék m, míg Béla osztásánál a hányados b és a maradék n. Ekkor $N = 20a + m = 26b + n$ és $a + m = b + n$.
Ebből $19a = 25b$ következik.
Mivel a 19 és a 25 relatív prímek, b-nek 19-cel (a-nak pedig 25-tel) osztható számnak kell lennie.
Mivel Anna kisebb számmal oszt, mint Béla, ezért legalább akkora hányadost kap, vagyis $a \geq b$, de az összegek miatt így $m \leq n \leq 25$. Ezért $a - b = n - m \leq 25$.
Ebből $19a - 19b \leq 19 \cdot 25$, de $19a - 19b = 25b - 19b = 6b$, így $b \leq \frac{19 \cdot 25}{6}$. Mivel b 19-cel osztható, ezért $b \leq 4 \cdot 19 = 76$.
Ebből $b + n \leq 76 + 25 = 101$, így $N = 25b + b + n \leq 25 \cdot 76 + 101 = 2001$.
A 2001 megfelelő, hiszen 20-szal osztva a hányados 100, a maradék 1, összesen 101; míg 26-tal osztva a hányados 76, a maradék 25, összesen 101. Tehát N legnagyobb értéke 2001.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.
Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.
Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Tehetség Program
Kulturális és Innovációs Minisztérium
Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő