



55. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2026. március 21.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. A -ból a 216 méterre lévő B -be elindul egy szúnyog. Négy másodperccel később elindul A -ból B -be egy légy is. Végig állandó sebességgel repülnek, a szúnyog 6 métert tesz meg másodpercenként, a légy pedig 8 métert. Amikor elérik A -t vagy B -t, akkor rögtön visszafordulnak.

Hány másodpercet repül a légy a harmadik találkozásukig?

Mindkét állat egyenes vonalban repül A és B között mindkét irányban.

Megoldás. Négy másodperc alatt a szúnyog 24 métert tesz meg, ennyivel lesz előrébb a légyhez képest. A légy másodpercenként 2 méterrel többet tesz meg, tehát 12 másodperc múlva fognak először találkozni.

A második találkozásuk akkor lesz, mikor a légy már B -ből A -ba tart, a szúnyog pedig még B -be.

A harmadik találkozásuk akkor lesz, amikor a légy A -ból B -be tart a szúnyog pedig B -ből A -ba. A feladat megoldásához elegendő ezt a találkozást meghatározni.

A légy az AB távolságot 27 másodperc alatt teszi meg, a szúnyog pedig 36 másodperc alatt.

A légynek 54 másodpercre van szüksége, hogy az indulás után újra A -ba érjen. Ekkor a szúnyog már 58 másodperce repül, tehát $58 - 36 = 22$ másodperce repül B -ből A felé. Ez idő alatt $22 \cdot 6 = 132$ métert tett meg.

Ez azt jelenti, hogy ebben a pillanatban $216 - 132 = 84$ méter közöttük a távolság, ami másodpercenként $8 + 6 = 14$ méterrel csökken. $84 : 14 = 6$ másodperc kell, hogy megtörténjen a harmadik találkozásuk.

A légy összesen $54 + 6 = 60$ másodpercet repült, mire harmadjára is találkoztak.

2. Egy tombolahúzáshoz száz darab tombolaszelvényt készítettek, melyeket 1-től 100-ig megszámoztak. Julcsi és Borka is vásárolt néhány szelvényt. Miközben vártak a sorsolásra, azt vették észre, hogy mindketten ugyanannyi szelvényt vettek. Ráadásul Julcsi szelvényein a számok összege megegyezik a Borka szelvényein lévő számok szorzatával.

Legfeljebb hány darab szelvényt vehetett Julcsi?

Megoldás. Lehetséges, hogy mindketten öt szelvényt vásároltak. Ha Borka az 1, 2, 3, 4, 5 számú szelvényeket vette, Julcsi pedig a 22, 23, 24, 25, 26 számúakat, akkor ez megfelel a feltételeknek, mivel

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 22 + 23 + 24 + 25 + 26.$$

Hat vagy annál több szelvényt nem vásárolhattak.



- Hat szelvény esetén a Borkánál lévő számok szorzatának legkisebb lehetséges értéke az első hat pozitív egész szorzata, vagyis 720. Viszont a hat legnagyobb szám összege is kisebb mint 600.
- Hét szelvény esetén ugyanezek a becslések $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 = 5040$ -et és 700-at adnak.
- Nyolc vagy annál több szelvény esetén a lehetséges legkisebb szorzat $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 = 40320$, és az összes szelvényen lévő 100 szám összege is csak 5050.

Második megoldás. Öt szelvény lehetséges, ahogyan ezt az első megoldásban is láttuk.

Ha Borka n szelvényt vett, akkor a legkisebb elérhető szorzat az $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n!$. Mivel Borcsa n számának szorzata meg kell egyezzen Julcsi n számának összegével, így Julcsi szelvényein a számok összege legalább $n!$, így átlaguk legalább $n! : n = (n - 1)!$. De az átlag nem lehet nagyobb, mint a legnagyobb szám, tehát $(n - 1)! \leq 100$. Mivel már $5! = 120$ is nagyobb 100-nál, így nem lehet 5-nél több szelvény Julcsinál.

Megjegyzés. Azt, hogy 6-nál több szelvényt nem vehetett Julcsi, így is indokolhatjuk: 50-nél több szelvényt nem vehetett, hiszen ugyanannyit vettek és összesen 100 darab volt. Ezért a Julcsinál lévő számok összege legfeljebb $51 + \dots + 100 = 3775$ lehetett. De a hét legkisebb szám szorzata $7! = 5040$, ami nagyobb ennél, tehát nem lehetett hét vagy több szelvény Borcsánál, és így Julcsinál sem.

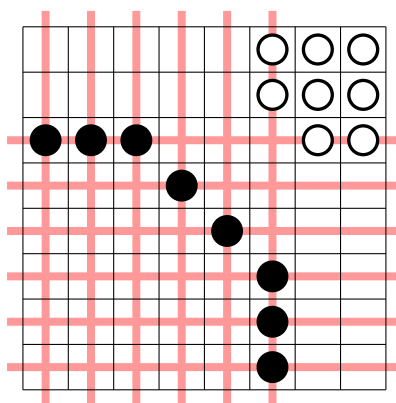
3. Egy 8×8 -as sakktábla mezőire elhelyeztünk 8 sötét és 8 világos bábút. Egy sort vagy oszlopot borúsnak nevezünk, ha több benne a sötét bábu, mint a világos.

Legfeljebb mennyi lehet a borús sorok és borús oszlopok számának összege?

Egy mezőn legfeljebb egy bábu áll és egy bábu sem állhat egyszerre több mezőn.

Megoldás. Nevezzük a sorokat és oszlopokat együttesen soroszlopnak.

El lehet helyezni a bábukat úgy, hogy 12 soroszlop borús legyen, íme egy példa erre (a piros vonalak jelzik a borús soroszlopokat):



Nem lehet 13 vagy annál több soroszlop borús.

Ha lenne 13, akkor lenne 7 sor vagy 7 oszlop, ami borús. Tegyük fel, hogy 7 ilyen sor van (a szimmetria miatt ennek nincs jelentősége).



Minden ilyen sorban kell lennie sötét bábnak, és így legfeljebb egy sorban lehet csak két sötét bábu. Vagyis ebből a 7 sorból egyetlen sor lehet, ahol van világos bábu, és ott is csak egy.

Emiatt a nyolcadik sorban kell lennie legalább 7 világos bábnak.

Az oszlopok közül is legalább 6 borús, és az oszlopok közül legalább 7-ben van világos bábu.

Így legfeljebb egy oszlop lehet 1 sötét bábu által borús, a maradék 5-ben legalább két sötét bábnak kell lennie, hogy borús legyen.

Ez viszont ellentmondás, hiszen ez legalább 11 sötét bábút jelentene, miközben csak 8 sötét bábút helyeztünk a táblára.

4. Egy sokszögnek pontosan öt oldalegyenese van. Lehetséges-e, hogy a sokszögnek

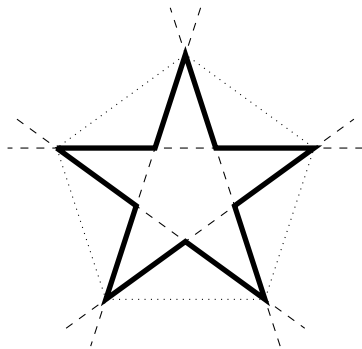
(a) tíz

(b) kilenc

oldala van?

Egy sokszög szomszédos oldalai nem eshetnek egy egyenesbe, nem szomszédos oldalainak pedig nem lehet közös pontjuk.

Megoldás. (a) Induljunk ki egy szabályos ötszögből és húzzuk be az átlóit. Az ötszög csúcsai és az átlók metszéspontjai egy olyan tízszöget határoznak meg, amelynek öt oldalegyenese van – az ötszög átlóinak egyenesei:



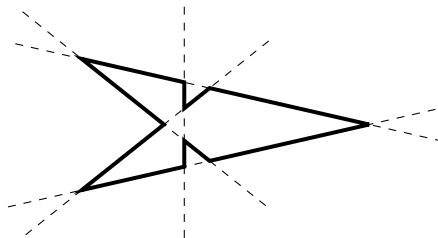
(b) Nevezzünk két egyenest szomszédosnak, ha a sokszögnek két szomszédos oldala illeszkedik rájuk. Minden egyenesnek kétszer annyi szomszédja van, mint ahány oldalszakasz illeszkedik rá, hiszen minden oldalszakasz mindkét végpontján áthalad egy-egy szomszédos egyenes és ezek nem eshetnek egybe. Így az öt oldalegyenes mindegyikének 2 vagy 4 szomszédja van.

Ha egy sokszög kilenc oldalú, akkor kilenc szomszédos oldalegyenes-párja van, azaz egyenesenként számolva összesen 18 szomszédtságot kapunk.

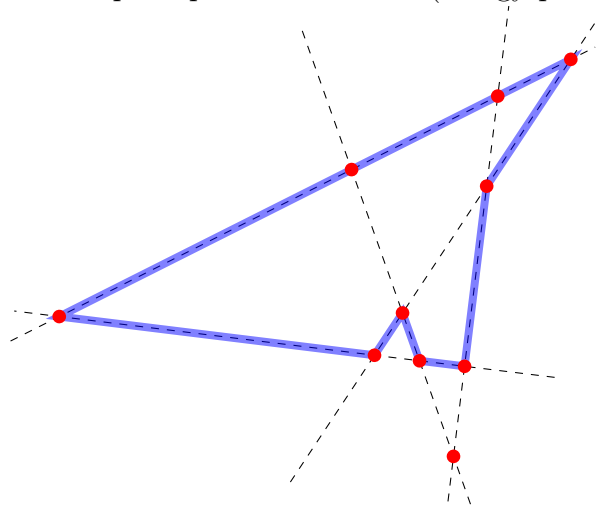
Öt egyenes esetén ez csak úgy lehetne, ha az oldalegyeneseknek 4, 4, 4, 4, 2 szomszédja lenne.

De ekkor az első négy egyenes mindegyike szomszédos lenne az ötödikkel is, így annak is négy szomszédja lenne, ami ellentmondás. Tehát nem létezik kilenc oldalú sokszög pontosan öt oldalegyenessel.

Második megoldás. (a) Öt egyenest az ábra szerint elhelyezve, és metszéspontjaikat megfelelően összekötve kaphatunk megfelelő tízsöveget.



(b) Jelöljük meg pirossal azokat a pontokat, ahol legalább két oldalegyenes találkozik. A sokszög összes csúcsának piros pontba kell esnie (de egy piros pont nem szükségszerűen csúcsa a sokszögnek).



Világos, hogy egy oldalegyenesen legfeljebb 4 piros pont lehet (mivel 4 másik egyenes van, amelyet elmetshet), ezért egy oldalegyenesre legfeljebb 2 oldala eshet a sokszögnek (hiszen 3 oldalhoz legalább $3 \cdot 2 = 6$ piros végpontra lenne szükség azon az egyenesen).

Tehát csak úgy lehetne 9-oldalú sokszögünk 5 oldalegyenessel, hogy 4 oldalegyenesre 2-2 oldala esne a sokszögnek (ezeket az oldalegyeneseket jelöljük így: e_1, e_2, e_3, e_4); és egyetlen oldalegyenes van, amelyre csak egy sokszögoldal esik (ezt az oldalegyenest jelölje f).

Továbbá 2 oldal csak úgy eshet egy oldalegyenesre, ha ezen az egyenesen 4 piros pont van, és ezek mind csúcsai a sokszögnek. Ezért az e_1, e_2, e_3, e_4 egyeneseken 4 piros pontnak kell lennie, azaz mind-egyiküknek metszenie kell f -et, ráadásul csupa különböző pontban (hiszen ha pl. e_1 és e_2 ugyanott metszené f -et, akkor e_1 -en legfeljebb 3 piros pont lehetne). Azaz f -en is 4 piros pontnak kell lennie, melyek mind csúcsai a sokszögnek.

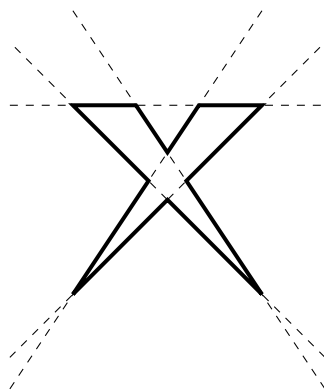
Ha egy f -re eső P piros pont csúcsa a sokszögnek, akkor ott egy f egyenesre eső sokszögoldalnak is kell végződnie, mivel P -ben csak két egyenes (f és valamelyik e_i) találkozik, a két ott összeérő sokszögoldal közül nem eshet mindegyik az e_i -re.

De ez azt jelentené, hogy 4 darab f -re eső sokszögcsúcshoz 2 darab f -re eső sokszögoldalnak is kellene tartoznia, ellentmondva f megválasztásának.

Tehát nem létezik 9-oldalú sokszög 5 oldalegyenessel.

Harmadik megoldás.

(a) Öt egyenest az ábra szerint elhelyezve, és metszéspontjaikat megfelelően összekötve kaphatunk megfelelő tízsöveget.



(b) 5 egyenesnek legfeljebb $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ metszéspontja lehet. Ha három egyenes egy pontban metszi egymást, akkor a három egyenespár három metszéspontja helyett csak egyet kapunk, így már legfeljebb $10 - 2 = 8$ metszéspont lehetne. Tegyük fel, hogy létezik kilenc oldalú (és így kilenc csúcsú) sokszög öt oldalegyenessel, ekkor az oldalegyenes-párok metszéspontjai mind különbözőek. Így vagy két egyenes párhuzamos, és ekkor kilenc metszéspont van, melyek mind a sokszög csúcsai, vagy tíz metszéspont van, amelyek közül pontosan egy nem csúcs.

Ha van két párhuzamos oldalegyenes, akkor legyenek ezek egyike e , ha pedig nincs, akkor a nem-csúcs metszéspontot meghatározó két egyenes egyike legyen e . Bármelyik eset is áll fenn, az e egyenesen fennmaradó három metszéspont mindegyike csúcsa kell legyen a sokszögnek. De mivel az e egyenest ezekben a pontokban csak 1-1 további egyenes metszi, mindegyikhez tartozik egy-egy e egyenesre illeszkedő oldal is.

Ez legalább két oldal, de csak három csúcs van az e egyenesen, tehát vannak rajta közös végponttal rendelkező oldalak is. Ez ellentmondás, mert egy csúcsba futó oldalak nem illeszkedhetnek egy egyenesre. Tehát nem létezik kilenc oldalú sokszög öt oldalegyenessel.

A feladatokat összeállította: Hujter Bálint, Juhász Péter, Polák Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Károlyi Gergely.

Az 504108/14266. sz. projektet a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Az NTP-TMV-25-0036/1. sz. projektet a Nemzeti Tehetségprogram és a Kulturális és Innovációs Minisztérium támogatja.

